

FM210 - Fisica Matematica 1 - Tutorato 1
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

2 Marzo 2019

Esercizio 1 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori.
2. Si determini la natura del punto d'equilibrio.
3. Scrivere la soluzione generale del sistema.
4. Risolvere lo stesso esercizio per B .

(*) Si ricordi che se entrambi gli autovalori sono positivi (negativi) l'origine è detta *sorgente* (pozzo), se gli autovalori hanno segno discorde l'origine è un punto di sella.

Esercizio 2 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se ne trovi la soluzione al variare del dato iniziale.

Esercizio 3 L'equazione $L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d}{dt} E(t)$, $R, L, C > 0$

descrive la corrente $I(t)$ in un circuito con una resistenza R , una induttanza L e una capacità C collegate in serie, cui è stata applicata una forza elettromotrice $E(t)$.

Assumendo $E(t) = E_0 \sin t\omega_0$, scrivere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine equivalente all'equazione e risolverlo al variare dei dati iniziali, in corrispondenza dei parametri: $R = 10\Omega, L = 1mH, C = 1mF,$
 $E_0 = 1V/m, \omega_0 = 2\pi \cdot 10Hz.$

Esercizio 4 Si consideri la forza posizionale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definita come segue:

$$\begin{pmatrix} kx_1 \cos^2 ax_3 \\ kx_2 \cos^2 ax_3 \\ -\frac{ak}{2}(x_1^2 + x_2^2) \sin 2ax_3 \end{pmatrix}$$

dove k e a sono parametri positivi.

Si stabilisca se \mathbf{F} è conservativa e, in caso, si determini l'energia potenziale corrispondente.

Esercizio 5 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m in due dimensioni, di coordinate $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$V(x) = A(x_1 + x_2)^3 + B|\mathbf{x}|^2 + C(x_1 - x_2)$$

dove A, B, C sono costanti positive.

Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.

Esercizio 6 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = -y^2 + (2e^{-x} - 1)^2 - 4xe^{-x}(2e^{-x} - 1) \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione $H(x, y) = x(y^2 - (2e^{-x} - 1)^2)$ è una costante del moto.

Esercizio Teorico Sia Φ il flusso di un sistema autonomo del primo ordine e T il suo periodo.

(1) Dimostrare che la definizione di periodo non dipende dal punto sulla traiettoria.

(2) Dimostrare che $\Phi(t + nT, x) = \Phi(t, x) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$