FM210 - Soluzioni Tutorato 9
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

11 Maggio 2020

Esercizio 1 Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1^2 + q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2)^3.$$

1. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare l'energia (generalizzata) E, conservata dalle equazioni del moto.
2. Sfruttando la simmetria della Lagrangiana, dimostrare che esiste un integrale primo distinto da E. Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I = c$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana ridotta.
3. Si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale associato a tale Lagrangiana ridotta.

Soluzione

1. Le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema sono:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = 2q_1 - 6q_1(q_1^2 + q_2^2)^2 \\ \ddot{q}_2 = 2q_2 - 6q_2(q_1^2 + q_2^2)^2 \end{cases}$$

L'energia generalizzata E, costante lungo le soluzioni alle equazioni di Eulero-Lagrange, è

$$E = \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (q_1^2 + q_2^2) + (q_1^2 + q_2^2)^3 \equiv \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + U(\mathbf{q}),$$

dove il potenziale U è

$$U(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}^6.$$

2. La Lagrangiana è invariante per rotazioni, i.e., è invariate sotto trasformazioni delle coordinate $\mathbf{q} \to g_\alpha(\mathbf{q})$ della forma:

$$g_\alpha(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$, e delle corrispondenti trasformazioni delle velocità

$$\dot{\mathbf{q}} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}.$$

La corrispondente grandezza conservata è, per il teorema di Noether,

$$I = I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{dg_\alpha(\mathbf{q})}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix},$$

e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}$, cosicché

$$I = q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1.$$

È conveniente passare a coordinate 'adattate alle simmetrie del sistema': visto che il potenziale $U(\mathbf{q})$ dipende solo dal modulo di $\mathbf{q}$, passo a coordinate polari:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

e noto che il potenziale, nelle nuove coordinate, dipende dalla sola coordinata r:

$$U(\mathbf{q}(r,\theta)) = -r^2 + r^6 \equiv V(r).$$

In altre parole, θ è una coordinata ciclica per la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ ottenuta trasformando la Lagrangiana originale nelle nuove coordinate, che ha la forma:

$$\tilde{\mathcal{L}}(r,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + r^2 - r^6.$$

In tali coordinate, la conservazione di I prende la forma:

$$I = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} \equiv c.$$

Assumendo $c \neq 0$, posso invertire tale relazione nella forma $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$. Usando il metodo di riduzione di Routh, ottengo la Lagrangiana ridotta le cui equazioni di Eulero-Lagrange descrivono il moto del sistema sulla superficie $I(r,\dot{\theta}) = c$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_R(r,\dot{r}) = \tilde{\mathcal{L}}(r,\dot{r},\dot{\theta}) - \dot{\theta}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}}\Big|_{\dot{\theta}=\frac{c}{r^2}} = \tilde{\mathcal{L}}(r,\dot{r},\frac{c}{r^2}) - \frac{c^2}{r^2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{c^2}{2r^2} + r^2 - r^6.$$

3. L'equazione del moto associata a $\tilde{\mathcal{L}}_R(r,\dot{r})$ è

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} + 2r - 6r^5,$$

le cui soluzioni conservano l'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6 \equiv \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r).$$

Il grafico qualitativo di $V_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6$ è mostrato in Fig.1.

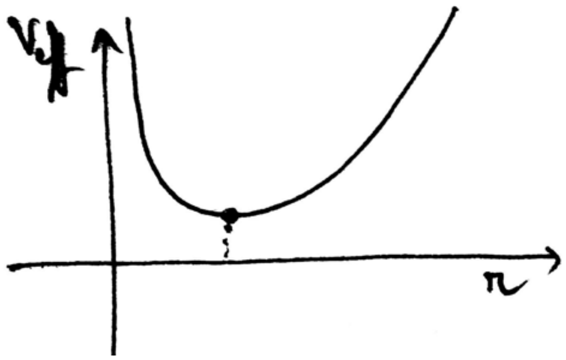


Figura 1:

Le curve di livello corrispondenti, al variare dell'energia E, sono mostrate in Fig.2.

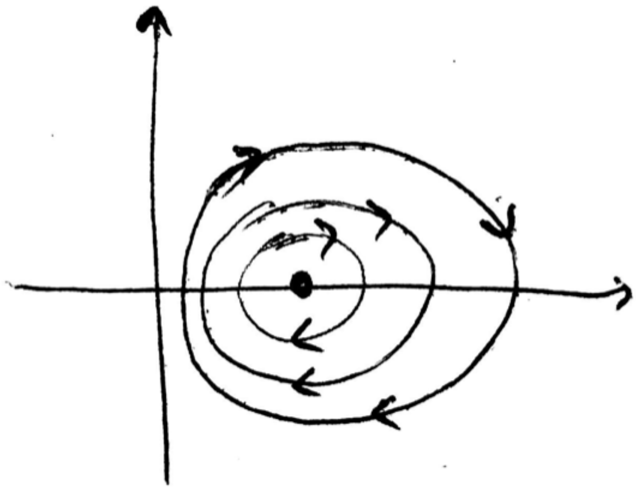


Figura 2:

I moti corrispondenti a tali curve di livello sono tutti chiusi e periodici.

Esercizio 2 Consideriamo un sistema meccanico formato da due punti A e B di massa m in cui A è collegato ad un punto fisso O tramite una sbarretta lunga L di massa M e B è collegato ad A tramite una molla di costante elastica $k > 0$ di lunghezza a riposo nulla.

Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrage. Trovare poi i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

[*Suggerimento*: Conviene usare come coordinate lagrangiane l'angolo φ_1 che il punto A forma con la verticale discendente e le coordinate cartesiane (x, y) del punto B.]

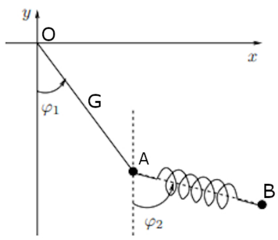


Figura 3:

Soluzione Scriviamo le coordinate dei punti:

$$A = (L \sin\varphi_1, -L\cos\varphi_1) \quad G = (\frac{L}{2}\sin\varphi_1, -\frac{L}{2}\cos\varphi_1) \quad B = (x, y)$$

dove G è il centro di massa della sbarretta. Scriviamo ora le velocità:

$$\dot{A} = (\dot{\varphi}_1 L\cos\varphi_1, \dot{\varphi}_1 L\sin\varphi_1) \quad \dot{G} = (\dot{\varphi}_1\frac{L}{2}\cos\varphi_1, \dot{\varphi}_1\frac{L}{2}\sin\varphi_1) \quad \dot{B} = (\dot{x}, \dot{y})$$

Calcoliamo l'energia cinetica:

$$\frac{m}{2}|\dot{A}|^2 + \frac{M}{2}|\dot{G}|^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{m}{2}|\dot{B}|^2 = (\frac{m}{2} - \frac{M}{2})L^2\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

E il potenziale (a meno di costanti additive):

$$V = Mgy_G + mgy_A + mgy_B + \frac{k}{2}|AB|^2 = -gL(\frac{M}{2} + m)\cos\varphi_1 + mgy_2 + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) - Lk(x\sin\varphi_1 - y\cos\varphi_1)$$

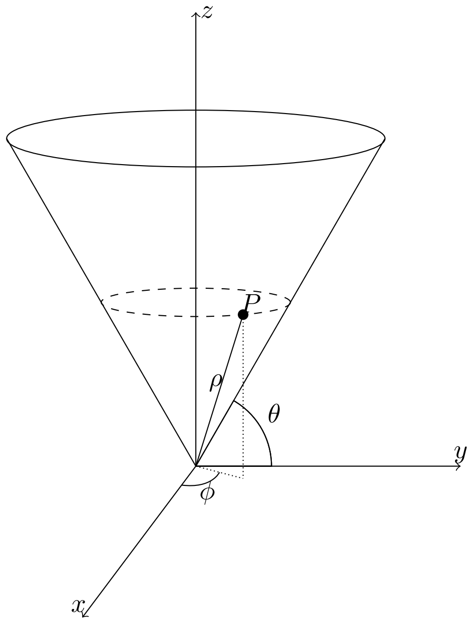
La lagrangiana sarà $\mathcal{L}(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, x, \dot{x}, y, \dot{y}) = T - V$ e quindi le equazioni di Eulero- Lagrange :

$$\begin{cases} L^2(m + \frac{M}{3})\ddot{\varphi}_1 = -gL(\frac{M}{2} - m)\sin\varphi_1 + Lk(x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1) \\ m\ddot{x} = -kx + Lk\sin\varphi_1 \\ m\ddot{y} = -mg - ky - Lk\cos\varphi_1 \end{cases}$$

Troviamo quindi i punti di equilibrio $Q_1 = (\varphi_1, x, y) = (0, 0, -L - \frac{mg}{k})$ (di equilibrio stabile) e $Q_2 = (\pi, 0, L - \frac{mg}{k})$ (di equilibrio instabile). Studiate la stabilità studiando la matrice Hessiana del potenziale:

$$\begin{pmatrix} gL(\frac{M}{2} + m)\cos\varphi_1 + Lk(x\sin\varphi_1 - y\cos\varphi_1) & -Lk\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -Lk\cos\varphi_1 & k & 0 \\ -Lk\sin\varphi_1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Esercizio 3 Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta \in (0, \pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.



1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale ϕ, come in figura.

2. Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi})$. Si riconosca che ϕ è una variabile ciclica.

3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e il momento coniugato alla variabile ciclica ϕ, che chiameremo A.

4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\phi}$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

6. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

[*Suggerimento*: θ è un angolo dato e quindi fisso, non dipendete dal tempo]

Soluzione

1. $P = (\rho\cos\phi\sin\theta, \rho\sin\phi\sin\theta)$
2. $\dot{P} = (\dot\rho\cos\phi\sin\theta - \rho\dot\phi\sin\phi\sin\theta, \dot\rho\sin\phi\sin\theta + \rho\dot\phi\cos\phi\sin\theta, \dot\rho\cos\theta)$

$$T = \frac{m}{2}|\dot{P}|^2 = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2\sin^2\theta \qquad V = mg\rho\cos\theta$$

   Quindi la lagrangiana è $\mathcal{L}(\rho, \phi, \dot\rho, \dot\phi) = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2\sin^2\theta - mg\rho\cos\theta$.

   Notiamo che $\mathcal{L}$ è indipendente da ϕ e che quindi, per definizione, è una variabile ciclica.

3. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot\rho = m\rho\dot\phi^2\sin^2\theta - mg\cos\theta \\ \dfrac{d}{dt}(m\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi\sin^2\theta) = 0 \end{cases}$$

   Oltre all'energia

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2\sin^2\theta + mg\rho\cos\theta$$

   c'è un secondo integrale primo

$$A := m\rho^2\dot\phi\sin^2\theta \Rightarrow \dot\phi = \frac{A}{m\rho^2\sin^2\theta}$$

4. Riscriviamo quindi E:

$$E = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{A^2}{2m\rho^2\sin^2\theta} + mg\rho\cos\theta = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + V_{eff}(\rho)$$

   dove

$$V_{eff}(\rho) = \frac{A^2}{2m\rho^2\sin^2\theta} + mg\rho\cos\theta$$

5.
$$V'_{eff}(\rho) = mg\cos\theta - \frac{A^2}{2m\rho^2\sin^2\theta}$$

   $V'_{eff}(\rho) > 0 \iff \rho > (\frac{A^2}{m^2 g\sin^2\theta\cos\theta})^{1/3} =: \rho_0$ quindi ρ_0 è un punto di minimo del potenziale efficace e $(\rho_0, 0)$ è punto stabile del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot\rho = y \\ m\dot y = -V'_{eff}(\rho) \end{cases}$$

   Dato che V_{eff} ha asintoto verticale $\rho = 0$ e asintoto obliquo $f(\rho) = (mg\cos\theta)\rho$, il potenziale ha la seguente forma:

   Quindi se $E = V'_{eff}(\rho_0)$ allora abbiamo il moto banale $\rho(t) \equiv \rho_0$ mentre se $E > V'_{eff}(rho_0)$ allora abbiamo che il moto radiale è un moto chiuso periodico per ogni dato iniziale.

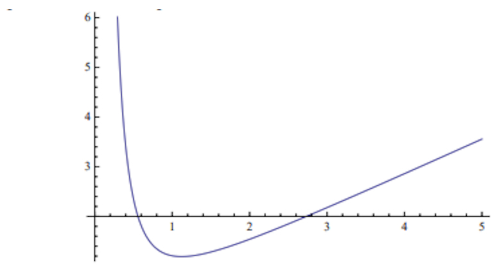


Figura 4:

6. - Il moto complessivo può essere periodico o quasi-periodico, a seconda del rapporto tra il periodo del moto radiale e di quello angolare. Se il moto radiale è banale, $\rho(t) \equiv \rho_0$, allora il moto complessivo è periodico, di velocità angolare $\dot{\phi} = cost. = \frac{A}{m\rho_0^2 \sin^2\theta}$ e di periodo $T = \frac{2\pi m\rho_0^2 \sin^2\theta}{A}$.

   Se $E > V_{eff}(\rho_0)$ allora il moto di ρ è non banale e periodico, di periodo

$$T_\rho = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}$$

   dove $\rho_\pm$ sono le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$.

   L'incremento di ϕ durante un periodo di ρ è

$$\Delta\phi = 2\frac{A}{m\sin^2\theta}\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}$$

   Il moto complessivo è periodico se e solo se $\frac{\Delta\phi}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, e in questo caso, se $\Delta\phi = \frac{2\pi p}{q}$, allora il periodo del moto è qT_ρ.

Esercizio 4 Si consideri una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ sottoposta alla forza $\mathbf{F}$ di componenti $F_x = -a, F_y = 0, F_z = 0$ con $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

1. Si mostri che $B = m\dot{x}t - mx + \frac{1}{2}at^2$ è una costante del moto;
2. Si mostri che B si conserva in virtù del teorema di Noether con la trasformazione $x \to x + \alpha t, y \to y, z \to z$;
3. Descrivere altre costanti del moto.

Soluzione

1. Consideriamo il moto $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. $B = B(x(t), \dot{x}(t), t)$ è una costante del moto perché

$$\frac{dB}{dt} = m\ddot{x}t + m\dot{x} - m\dot{x} + at = 0$$

   perchè la prima equazione del moto è $m\ddot{x} = a$

2. Poiché la forza è conservativa di potenziale $U = ax$, la lagrangiana è $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - ax$.

   La trasformazione $x \to x + \alpha t, y \to y, z \to z$ induce la trasformazione sulle velocità $\dot{x} \to \dot{x} + \alpha, \dot{y} \to \dot{y}, \dot{z} \to \dot{z}$, e quindi la lagrangiana si trasforma in $\tilde{\mathcal{L}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m}{2}\alpha^2 + m\alpha\dot{x} - ax - a\alpha t$. Calcolando la derivata rispetto ad α si ottiene $\frac{d\tilde{\mathcal{L}}}{d\alpha}_{\big|\alpha=0} = m\dot{x} - at$.

   Questa è la derivata rispetto a t (lungo il moto) della funzione $F(x,t) = mx - \frac{1}{2}at^2$, e le ipotesi del teorema Noether sono soddisfatte: la quantità conservata è quindi

$$B = F - \left(\frac{d\tilde{\mathcal{L}}}{d\dot{x}} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{d\tilde{\mathcal{L}}}{d\dot{y}} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{d\tilde{\mathcal{L}}}{d\dot{z}} \frac{dz}{d\alpha} \right)_{\big|\alpha=0} = mx - \frac{1}{2}at^2 - m\dot{x}t$$

   che era ciò che volevamo dimostrare.

3. Poiché la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, si conserva l'energia totale $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + ax$. Inoltre vediamo subito che la lagrangiana non dipende neanche da y e z che pertanto, per definizione, sono variabili cicliche e quindi i momenti, $p_y = m\dot{y}$ e $p_z = m\dot{z}$ ad esse relative sono altre due costanti del moto.