FM210 - Soluzioni Tutorato 8
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

4 Maggio 2020

Esercizio 1 Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema bidimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 - 2q_1q_2$$

e trovarne esplicitamente la soluzione.

Soluzione Le equazioni di Eulero-Lagrange sono della forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\dot{q}_2 - 2q_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = q_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \dot{q}_1 - 2q_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = -q_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} \dot{q}_2 = -\dot{q}_2 - 2q_2 \\ -\dot{q}_1 = \dot{q}_1 - 2q_1 \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} q_2(t) = q_2(0)e^{-t} \\ q_1(t) = q_1(0)e^{t} \end{cases}$$

Esercizio 2 Si scrivano la lagrangiana che descriva un pendolo semplice di massa m e lunghezza ℓ e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange

Soluzione Se (x, y) sono le coordinate del punto di massa m e θ l'angolo che la retta passante per tale punto e il punto di sospensione forma con la verticale, si ha tramite il solito cambio in coordinate polari che $(x, y) = (\ell \sin\theta, -\ell\cos\theta)$. La lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta.$$

Quindi $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$ sono le corrispondenti equazione di Eulero-Lagrange

Esercizio 3 Si calcolino le reazioni vincolari del pendolo semplice dell'esercizio precedente. In particolare si determino in corrispondenza di quale configurazione assumono il valore massimo e il valore minimo.

Soluzione Poiché, come visto, $(x, y) = (\ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$, si ha

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} = \ell\ddot{\theta}\sin\theta - \ell\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$

dove $\ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta$ e $\ell\dot{\theta}^2 + 2g(1-\cos\theta) = gA$, se $A := \frac{2E}{mg\ell}$ (per la conservazione dell'energia E). Ho ottenuto quest'ultima relazione calcolando
$E = T + U = \dfrac{m}{2}|\dot{x}|^2 + mg(1-\cos\theta)$
Scrivendo quindi le componenti $f_{V,x} = m\ddot{x}$ e $f_{V,y} = m\ddot{y} + mg$ si trova

$$f_{V,x} = -mg(A + 3\cos\theta - 2)\sin\theta, \qquad f_{V,y} = mg(A + 3\cos\theta - 2)\cos\theta$$

Il massimo della funzione $|\mathbf{f}_v| = |f_{V,x}|^2 + |f_{V,y}|^2 = m^2g^2(A + 3\cos\theta - 2)^2$ è quindi raggiunto quando $\theta = 0$, mentre il minimo si ha per $\theta = \pi$

Esercizio 4 Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo ℓ sospesa a un punto di sospensione O, al cui estremo libero è appesa una massa m (vedi Fig.1). Si scriva la Lagrangiana del sistema usando le coordinate x e θ, dove $\ell + x$ è la lunghezza della molla e θ l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

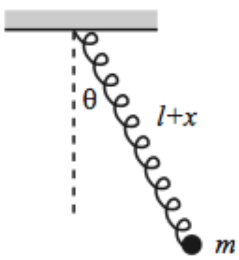
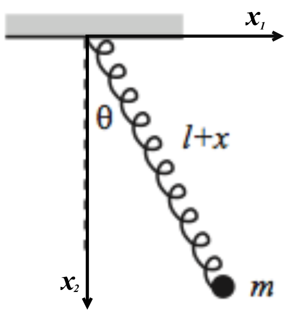


Figura 1:



Soluzione Consideriamo il seguente sistema di riferimento:

Ricordiamo che la Lagrangiana è definita come: $\mathcal{L} = T - U$ dove T è l'energia cinetica e U è il potenziale. Cominciamo con riscriverci le coordinate $x_{1,m}$ e $x_{2,m}$ del punto di massa m in termini delle coordinate x e θ:

$$\begin{cases} x_{1,m} = (\ell + x)\sin\theta \\ x_{2,m} = (\ell + x)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{1,m} = \dot{x}\sin\theta + (l + x)\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{x}_{2,m} = \dot{x}\cos\theta - (l + x)\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{1,m}^2 + \dot{x}_{2,m}^2) = \frac{1}{2}m[(\dot{x}\sin\theta + (\ell+x)\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\dot{x}\cos\theta - (\ell+x)\dot{\theta}\sin\theta)^2] = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (\ell+x)^2\dot{\theta}]$$

Notiamo che il corpo di massa m è soggetto sia alla forza peso che alla forza elastica:

$$\Rightarrow U = U_{el} + U_{grav} = \frac{1}{2}kx^2 - mg(\ell + x)\cos\theta$$

Pertanto la Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (\ell + x)^2\dot{\theta}^2] - \frac{1}{2}kx^2 + mg(\ell + x)\cos\theta$$

Da cui:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mg(\ell + x)\sin\theta$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m(\ell + x)^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = 2m(\ell + x)\dot{x}\dot{\theta} + m(\ell + x)^2\ddot{\theta}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta \\ 2(\ell + x)\dot{x}\dot{\theta} + (\ell + x)^2\ddot{\theta} = -g(\ell + x)\sin\theta \end{cases}$$

Esercizio 5 Un sistema meccanico è costituito fa tre punti P_1, P_2 e Q, di masse, rispettivamente $m_1 = m_2 = m$ e $m_3 = 2m$, vincolati su un piano verticale π. I due punti P_1 e P_2 si muovono lungo un asse orizzontale (che si può identificare con l'asse x) e sono entrambi collegati a Q tramite due sbarre rettilinee di lunghezza L e massa trascurabile. Il punto P_1 è collegato a un punto fisso O dell'asse lungo cui scorre tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sia g l'accelerazione di gravità.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto Q lungo l'asse orizzontale e l'angolo θ che la retta passante per i punti P_1 e Q forma con tale asse.

2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

3. Per $k = 0$ si discuta qualitativamente il moto.

4. Sempre per $k = 0$, partendo dalla configurazione iniziale

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

si descriva qualitativamente il moto e si determini la forza vincolare nel punto Q in funzione del tempo, in particolare quando tale punto si trova a quota $\frac{L}{\sqrt{2}}$ al di sotto dell'asse x.

5. Si discuta come si modifica la trattazione se entrambe le sbarre hanno massa M e sono omogenee.

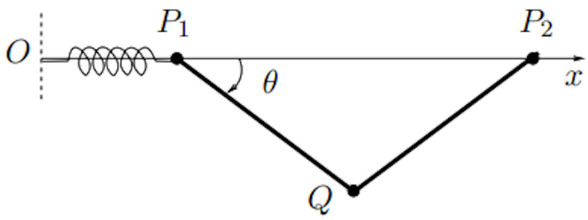


Figura 2:

Soluzione

1. Per scrivere la lagrangiana calcoliamo energia cinetica e potenziale.

   Iniziamo scrivendo le coordinate dei tre punti:

$$P_1 = (x - L\cos\theta; 0) \qquad P_2 = (x \pm L\cos\theta; 0) \qquad Q = (x, -L\sin\theta)$$

e le tre velocità:

$$\dot{P}_1 = (\dot{x} - L\dot{\theta}\sin\theta; 0) \qquad \dot{P}_2 = (\dot{x} \mp L\dot{\theta}\sin\theta; 0) \qquad Q = (\dot{x}, -L\dot{\theta}\cos\theta)$$

Ora l'energia cinetica (vanno divisi divisi due casi, se in P2 ho $+$ o se ho $-$. Io faccio $+$ perché l'altro è molto simile):

$$T = \frac{m_1}{2}|\dot{P}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{P}_2|^2 + \frac{m_3}{2}|\dot{Q}|^2 = m(2\dot{x} + L^2\dot{\theta}^2)$$

La potenziale:

$$V = U_{P_Q} + U_{E_{P_1}} = m_3 g y_Q + \frac{k}{2}x_{P_1}^2 = -2mgL\sin\theta + \frac{k}{2}(x^2 + L^2\cos^2\theta - 2Lx\cos\theta)$$

Quindi $\mathcal{L} = T - V$ con T e V appena calcolati e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} 4m\ddot{x} = -kx + kLx\cos\theta \\ 2mL^2\ddot{\theta} = 2mgL\cos\theta + \frac{k}{2}L^2\sin 2\theta - kLx\sin\theta \end{cases}$$

2. Per calcolare i punti di equilibrio, vista l'equivalenza tra le equazioni di Newton e quelle di Eulero-Lagrange, ci basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} -kx + kLx\cos\theta = 0 \\ 2mgL\cos\theta + \frac{k}{2}L^2\sin 2\theta - kLx\sin\theta = 0 \end{cases}$$

ottenendo così che i punti di equilibrio sono $(x,\theta) = (0, \frac{\pi}{2})$ e $(x,\theta) = (0, -\frac{\pi}{2})$.

Calcolando la matrice hessiana del potenziale e calcolandola nei punti di equilibrio

$$\begin{pmatrix} k & Lk\sin\theta \\ Lk\sin\theta & 2mgL\sin\theta + 2kLx\cos\theta - kL^2\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

vediamo che $(0, \frac{\pi}{2})$ è un punto di equilibrio stabile e che $(0, \text{-}\frac{\pi}{2})$ è un punto di equilibrio instabile.

3. Per $k = 0$ cioè in assenza della molla abbiamo che $\ddot{x} = 0$ e che $L\ddot{\theta} = g\cos\theta$, quindi il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme, mentre l'equazione per la variabile θ descrive un moto unidimensionale di un punto di massa $m = 1$ ed energia potenziale $V = \frac{g}{L}\sin\theta$. Nel sistema del centro di massa, il sistema descrive un moto simile a quello di un pendolo semplice.

4. Sempre per $k = 0$, considerando che il moto parte con la configurazione iniziale

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

la forza vincolare che agisce sul punto Q è data da

$$R^{(Q)} = (2m\ddot{x} - f_x^{(Q)}, 2m\ddot{y} - f_y^{(Q)}),$$

dove $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = L\dot{\theta}^2\sin\theta - L\ddot{\theta}\cos\theta, f_x^{(Q)} = 0$ e $f_y^{(Q)} = -2mg$, così che

$$R^{(Q)} = (0, 2m(L\dot{\theta}^2 \sin\theta - L\ddot{\theta}\cos\theta)) = (0, 2mg(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta + 1)),$$

dove si è usato che l'energia totale per il moto della variabile θ è $E(\theta, \dot{\theta}) = 0$ in corrispondenza dei dei dati iniziali scelti. In particolare, quando Q si trova alla quota $\frac{L}{\sqrt{2}}$ sotto l'asse x, si ha $\frac{\theta}{4}$ e quindi la forza vincolare $R^{(Q)} = (0, 0)$.

5. Se le due sbarre hanno massa M, l'energia cinetica delle sbarre può essere calcolata utilizzando il teorema di König. Innanzitutto cerchiamo i centri di massa delle due sbarrette e le loro velocità:

$$G_1 = (x - \frac{L}{2}\cos\theta; -\frac{L}{2}\sin\theta) \qquad G_2 = (x \pm \frac{L}{2}\cos\theta; -\frac{L}{2}\sin\theta)$$
$$\dot{G}_1 = (\dot{x} + \frac{L\dot{\theta}}{2}\sin\theta; -\frac{L\dot{\theta}}{2}\cos\theta) \qquad \dot{G}_2 = (\dot{x} \mp \frac{L\dot{\theta}}{2}\sin\theta; -\frac{L\dot{\theta}}{2}\cos\theta)$$

Calcoliamo l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}M|\dot{G}_1|^2 + \frac{I_1\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}M|\dot{G}_2|^2 + \frac{I_2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}m|\dot{P}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{P}_2|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{Q}|^2 = (M+2m)\dot{x}^2 + (\frac{M}{3}+m)L^2\dot{\theta}^2$$

dove ho usato che $I_1 = I_2 = \frac{ML^2}{12}$

Ora il potenziale:

$$V = U_{P_Q} + U_{E_{P_1}} + U_{P_{G_1}} + U_{P_{G_2}} = -MgL\sin\theta - \frac{k}{2}(x - L\cos\theta)^2 - 2mgL\sin\theta$$

Da cui la lagrangiana $\mathcal{L} = T - V = (M + 2m)\dot{x}^2 + (\frac{M}{3} + m)L^2\dot{\theta}^2 - (-MgL\sin\theta - \frac{k}{2}(x - L\cos\theta)^2 - 2mgL\sin\theta)$ che può essere discussa analogamente al caso $M = 0$.

Equazioni di Eulero Lagrange:

$$\begin{cases} 2(M + 2m)\ddot{x} = k(x - L\cos\theta) \\ 2(m + \frac{M}{3})L^2\ddot{\theta} = (M + 2m)gL\cos\theta + Lk(x - L\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

Da cui ricaviamo che i punti di equilibrio sono $(x, \theta) = (0, \pm\frac{\pi}{2})$, entrambi instabili.