FM210 - Soluzioni Tutorato 6
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

15 Aprile 2020

Esercizio 1 Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale P di massa m, connesso da un'asta rigida di massa nulla a un punto fisso O (punto di sospensione) e vincolato a muoversi in un piano e soggetto alla forza di gravità. Si dimostri che il moto del pendolo è regolato dall'equazione $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$ con g accelerazione di gravità e l lunghezza dell'asta.

Soluzione Si scelga un sistema di riferimento nel piano in cui si svolge il moto tale che il punto O coincida con l'origine. Siano (x, y) le coordinate del punto P. Il vincolo a cui è sottoposto il sistema è dato da $G(x, y) = x^2 + y^2 - l^2$, quindi le equazioni del moto, in accordo con

$$\begin{cases} G_i(x,t) = 0, \quad i = 1, ..., M \\ m\ddot{x} = f + f_V, \quad \text{dove } m \text{ è la matrice di massa} \\ f_v = \sum_i^M \lambda_i \partial_x G_i \end{cases}$$

si possono scrivere nella forma $m\ddot{x} = 2\lambda x, m\ddot{y} = -mg + 2\lambda$. Passando a coordinate polari, si ha $x = \rho\sin\theta, y = -\rho\cos\theta$, dove $\rho = l$ e θ rappresenta l'angolo che l'asta forma con la verticale discendente condotta per il punto O. Per la variabile angolare θ si ottiene

$$\theta = -\arctan\frac{x}{y} \Rightarrow \dot{\theta}) - \frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{\rho^2} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{\ddot{x}y - x\ddot{y}}{\rho^2} - 2\dot{\rho}\frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{\rho^3}$$

mentre per la variabile radiale si ha

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho\dot{\rho} = x\dot{x} + y\dot{y} \Rightarrow \rho\ddot{\rho} = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \rho^2\dot{\theta}^2$$

avendo tenuto conto che $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\rho}^2$. Il moltiplicatore di Lagrange λ va scelto derivando due volte rispetto tempo la relazione $\rho(t) - l = 0$: dall'equazione radiale si ottiene

$$0 = m\rho\ddot{\rho} = mx\ddot{x} + my\ddot{y} + m\rho^2\dot{\theta}^2 = 2\lambda\rho^2 + mg\rho\cos\theta + m\rho^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \lambda = -\frac{m}{2}(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}\cos\theta,$$

mentre l'equazione angolare diventa, tenendo conto che $\dot{\rho} = 0$ e $\rho = l$,

$$m\ddot{\theta} = -\frac{1}{\rho^2}(2\lambda yx - xmg - 2\lambda xy) = \frac{xmg}{\rho^2} = -\frac{m}{l}g\sin\theta$$

che implica $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$. Si noti che λ dipende dalla posizione e dalla velocità del punto P.

Esercizio 2 Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove nel piano (x, y) lungo il profilo di un'equazione $y = x^2$ in modo tale che la sua componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = \sin t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = t$.

1. Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.
2. Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema k e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema K
3. Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v'.
4. Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0
5. Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T
6. Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P
7. Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P
8. Dimostrare che la traiettoria $t \to \mathbf{q}(t)$ attraversa l'asse x infinite volte, e calcolare esplicitamente i tempi di attraversamento. [*Suggerimento* Si ha $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ per $|x| < \frac{\pi}{2}$]

Soluzione

1. Il vettore che individua O' nel sistema k è dato da $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \sin^2 t, 0)$ mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\tan\theta(t) = \dfrac{dy}{dx}x_{O'} = 2\sin t$e perciò $\theta(t) = \arctan 2\sin t$.

Quindi la trasformazione rigida è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Poiché P si muove in K lungo l'asse ξ con legge $\xi(t) = t$, la legge del moto in K sarà semplicemente $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (t, 0, 0)$.

   Per ottenere la legge del moto in k basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}$, ottenendo quindi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Sappiamo che la velocità assoluta è $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, e quindi basta semplicemente derivare il vettore che individua P nel sistema k ottenendo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) - t\dot{\theta}\sin t + cost \\ \sin\theta(t) + t\dot{\theta}\cos t + 2\sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

   dove

$$\dot{\theta(t)} = \frac{t\cos t}{1 + 4\cos^2 t}$$

   Derivando poi il vettore che individua P nel sistema K, otteniamo $\dot{\mathbf{Q}} = (1, 0, 0)$ perciò la velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (cost, \sin 2t, 0)$

5. Sappiamo che $\mathbf{v}_T = \omega \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{r})$, con $|\omega| = \dot{\theta}$. D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k, avremo $\omega(t) = (0, 0, \dot{\theta(t)})$. Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = (0, -2\dot{\theta}, 0)$$

6. Sappiamo che la forza centrifuga $F_{cf} = -\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ dove $\mathbf{\Omega} = B\omega$ e quindi, nel nostro caso $\mathbf{\Omega} = \omega$. Perciò otteniamo

$$F_{cf} = (0, t\dot{\theta}, 0)$$

7. Sapendo che la forza di Coriolis è $F_{cor} = -2(\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}})$, troviamo che

$$F_{cor} = (-t\dot{\theta^2}, 0, 0)$$

8. La traiettoria $t \to \mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), 0)$ attraversa l'asse x per t tale che $y(t) = 0$. Si ha

$$y(t) = t\sin\theta(t) + \sin^2 t, \quad \sin\theta(t) = \frac{\tan\theta(t)}{\sqrt{1 + \tan^2\theta(t)}} = \frac{2\sin t}{\sqrt{1 + 4\sin^2 t}}$$

   quindi $y(y) = 0$ diventa

$$\sin t\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{1+4\sin^2 t}}+\sin t\right)=0$$

Poiché $1 \leq 1+4\sin^2 t \leq 5$, e quindi

$$\frac{2t}{\sqrt{5}} \leq \frac{2t}{\sqrt{1+4\sin^2 t}} \leq 2t,$$

mentre, $|\sin t| \leq 1$, la funzione

$$\frac{2t}{\sqrt{1+4\sin^2 t}}+\sin t$$

non si annulla mai, e quindi $y(t) = 0$ se e solo se $\sin t = 0$. La funzione sin t si annulla infinite volte, ogni qual volta si abbia $t = t_k = \pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Quindi i tempi di attraversamento sono dati dai tempi della successione $\{t_k\}$.

Esercizio 3 Si definisca la velocità areolare per un punto materiale che si muova lungo un'orbita piana chiusa. Si dimostri che, se il punto materiale si muove sotto l'azione di una forza centrale gravitazionale, la velocità areolare si conserva.

Soluzione La velocità areolare V_A è definita come l'area del settore dell'ellisse delimitata dal raggio vettore $\mathbf{r}(t)$ nell'unità di tempo. La velocità areolare istantanea

$$V_A(t) = \lim_{h\to 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{h} = \frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t) = \frac{L}{2\mu}$$

che implica $V_A = V_A(t)$ è costante perché L è costante.

Per i dettagli vedere il paragrafo 31.16 di [G].

Esercizio 4 Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto a una forza centrale di energia potenziale:

$$V(\rho) = 2\log(\rho) - \frac{1}{2}\log(1+2\rho^2+2\rho^4)$$

Si assuma che il momento angolare L del sistema sia diverso da zero. Al variare di L si risponda alle seguenti domande

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace e analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
4. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Si discuta come cambia lo scenario per $L = 0$.

Soluzione

1. Il potenziale efficace è dato da

$$V_{eff}(\rho) = 2\log(\rho) - \frac{1}{2}\log(1+2\rho^2+2\rho^4) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}, \quad L \neq 0$$

   e quindi l'equazione di Newton è

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{2}{\rho} + \frac{2\rho+4\rho^2}{1+2\rho^2+2\rho^4} + \frac{\beta}{\rho^3} \qquad \beta = \frac{L^2}{\mu} > 0$$

   Il sistema dinamico associato è quindi $\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{dV_{eff}}{d\rho} = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{2}{\rho} + \frac{2\rho+4\rho^2}{1+2\rho^2+2\rho^4} + \frac{\beta}{\rho^3}\right) \end{cases}$

2. Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_{eq}, 0)$ con ρ_{eq} punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ vediamo che si hanno punti di equilibrio solo se $0 < \beta < 1$ e in tal caso l'unico punto stazionario del potenziale efficace è

$$\rho_{eq} = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}{2}}$$

   e poiché questo è un punto di minimo per il potenziale efficace, allora il punto $(\rho_{eq}, 0)$ è un punto di equilibrio stabile. Per vedere che è un punto di minimo il modo più rapido è notare che il segno della derivata $V'_{eff}(\rho)$ è lo stesso del polinomio $2x^2 + 2x - \frac{\beta}{1-\beta}$.

3. Studiamo il potenziale efficace. La funzione $V_{eff}(\rho)$ è definita per $\rho > 0$, e si ha

$$\lim_{\rho\to 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho\to+\infty} V_{eff}(\rho) = -\log\sqrt{2}$$

   Abbiamo già visto che per $\beta \geq 1$ la derivata non si annulla mai. E studiandone il segno vediamo che V_{eff} è decrescente in tutto il dominio.

   Se invece $0 < \beta < 1$ la derivata ha un minimo in ρ_{eq}

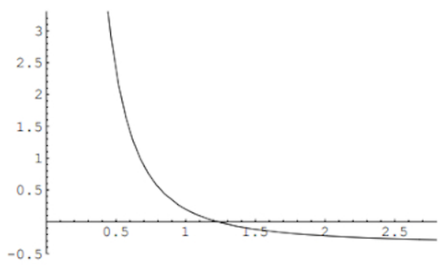

Figura 1: Grafico del potenziale con $\beta \geq 1$

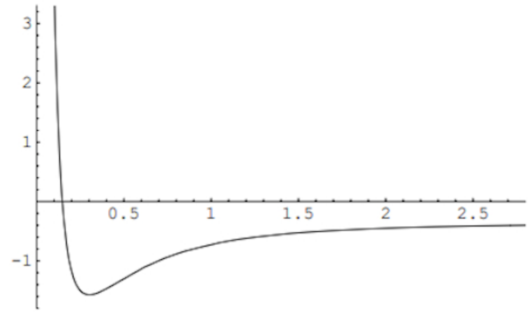

Figura 2: Grafico del potenziale con $0 < \beta < 1$

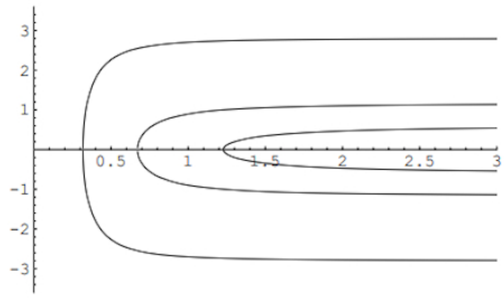

Figura 3: Spazio delle fasi con $\beta \geq 1$

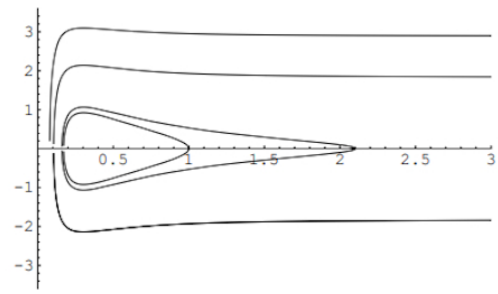

Figura 4: Spazio delle fasi con $0 < \beta < 1$

4. Si possono avere traiettorie periodiche solo per $0 < \beta < 1$.In tal caso si hanno due possibilità: se l'energia E è tale che $Veff(\rho_{eq}) < E < -\log\sqrt{2}$ allora abbiamo curve chiuse periodiche e se $E = Veff(\rho_{eq})$ e $\rho_0 = \rho_{eq}$ abbiamo un moto fisso. In questo secondo caso, in cui la variabile radiale è ferma nel suo punto di equilibrio, risulta $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho_0^2}$ e quindi il punto materiale si muove lungo un'orbita circolare con velocità angolare costante (e quindi si muove di moto circolare uniforme)

5. Se $L = 0$

$$V(\rho) = 2\log(\rho) - \frac{1}{2}\log(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4)$$

$$\frac{dV_{eff}}{d\rho} = \frac{2}{\rho} - \frac{2\rho + 4\rho^2}{1 + 2\rho^2 + 2\rho^4} = \frac{2(\rho^2 + 1}{\rho(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4)}$$

Quindi $\frac{dV_{eff}}{d\rho} > 0$ e quindi V_{eff} è strettamente crescente. Inoltre si ha $\lim_{\rho \to 0^+} = -\infty$ e l'asintoto orizzontale resta $-\log\sqrt{2}$ Vediamo quindi il grafico del potenziale e dello spazio delle fasi. 7. In particolare vediamo che non esistono punti d'equilibrio né traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ e quindi a maggior ragione non esistono moti periodici per il moto complessivo.

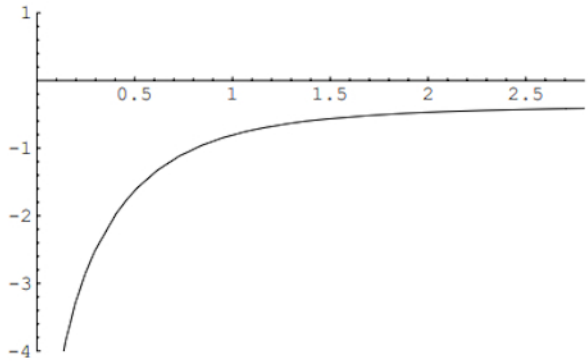

Figura 5: Grafico del potenziale con $L = 0$

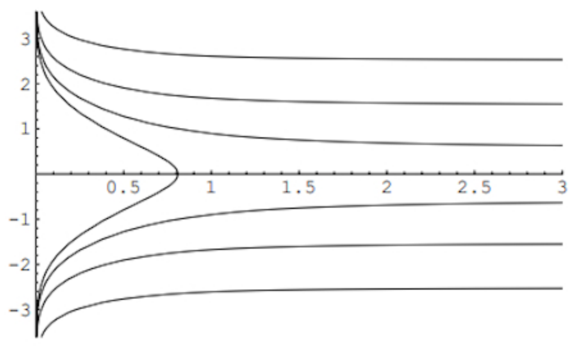

Figura 6: Spazio delle fasi con $L = 0$