FM210 - Soluzioni Tutorato 5
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

8 Aprile 2020

Esercizio 1 Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log(1+\rho^2) - \log\rho$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

Soluzione

1. Il potenziale efficace è dato da

   $$V_{eff}(\rho) = \log(1+\rho^2) - \log\rho + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}, \quad L \neq 0$$

   e quindi l'equazione di Newton è

   $$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{2\rho}{1+\rho^2} + \frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\mu\rho^3}$$

   Il sistema dinamico associato è quindi $\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{2\rho}{1+\rho^2} + \frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\mu\rho^3} \end{cases}$

2. Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_{eq}, 0)$ con ρ_{eq} punto critico del potenziale efficace;

pertanto risolvendo l'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ vediamo che l'unico punto stazionario del potenziale efficace è

$$\rho_{eq} = \sqrt{\frac{1+\alpha+\sqrt{\alpha^2+6\alpha+1}}{2}}, \quad \alpha = \frac{L^2}{\mu}$$

e poiché questo è un punto di minimo per il potenziale efficace, allora il punto $(\rho_{eq}, 0)$ è un punto di equilibrio stabile.

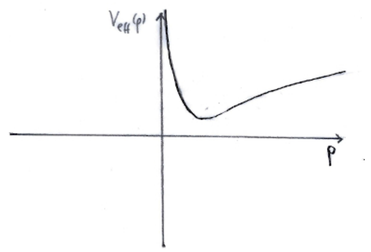

Figura 1: Grafico del potenziale

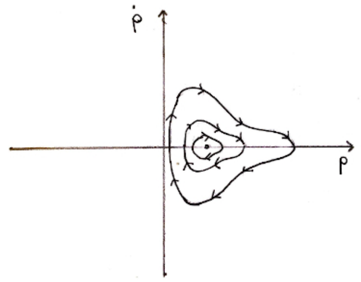

Figura 2: Spazio delle fasi

Tutte le curve per $E > Veff(\rho_{eq})$ sono curve chiuse periodiche e per $E = Veff(\rho_{eq})$ e $\rho_0 = \rho_{eq}$ abbiamo un moto fisso.

Esercizio 2 Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove lungo il profilo di un'equazione

$$y = x^2(x+1)(x+2)$$

La componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo una circonferenza di centro O' e raggio $R = 1$ secondo la legge $\xi(t) = \cos 2t$.

1. Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.

2. Scrivere la legge del moto nei sisitemi k e K.
3. Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v'.
4. Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0
5. Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T
6. Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P
7. Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P

Soluzione

1. Il vettore che individua O' nel sistema k è dato da $\mathbf{r}(t) = (t, t^2(t+1)(t+2), 0)$ mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma
$$B = B^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
dove $\theta(t)$ è tale che $\tan\theta(t) = \dot{y_{O'}}$. Poiché $y_{O'}(t) = t^2(t+1)(t+2)$ avremo che $\dot{y_{O'}} = 4t^3 + 9t^2 + 4t$ e perciò $\theta(t) = \arctan(4t^3 + 9t^2 + 4t)$.

   Quindi la trasformazione rigida è data da
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Poiché P si muove in K lungo una circonferenza, la legge del moto in K sarà semplicemente $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$.

   Per ottenere la legge del moto in k basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}$, ottenendo quindi
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \cos(\theta(t) + 2t) \\ t^2(t+1)(t+2) + \sin(\theta(t) + 2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Sappiamo che la velocità assoluta è $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, e quindi basta semplicemente derivare il vettore che individua P nel sistema k ottenendo
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 - (2 + \dot{\theta(t)})\sin(\theta(t) + 2t) \\ \tan(\theta(t)) + (2 + \dot{\theta(t)})\cos(\theta(t) + 2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$
dove
$$\dot{\theta(t)} = \frac{12t^2 + 18t + 4}{1 + (4t^2 + 9t^2 + 4t)^2}$$
Derivando poi il vettore che individua P nel sistema K, otteniamo $\dot{\mathbf{Q}} = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, 0)$ perciò la velocità relativa è data da
$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -2\sin(\theta(t) + 2t) \\ 2\cos(\theta(t) + 2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (1, 4t^3 + 9t^2 + 4t, 0) = (1, \tan\theta(t), 0)$

5. Sappiamo che $\mathbf{v}_T = \omega \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{r})$, con $|\omega| = \dot{\theta}$. D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k, avremo $\omega(t) = (0, 0, \dot{\theta(t)})$. Da ciò otteniamo quindi
$$\mathbf{v}_T = (-\dot{\theta(t)} \sin(\theta(t) + 2t), \dot{\theta(t)} \cos(\theta(t) + 2t), 0)$$

6. Sappiamo che la forza centrifuga $F_{cf} = -\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ dove $\mathbf{\Omega} = B\omega$ e quindi, nel nostro caso $\mathbf{\Omega} = \omega$. Perciò otteniamo
$$F_{cf} = (\dot{\theta}^2(t) \cos 2t, \dot{\theta}^2(t) \sin 2t, 0) = \dot{\theta}^2(t)\mathbf{Q}(t)$$

7. Sapendo che la forza di Coriolis è $F_{cor} = -2(\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}})$, troviamo che
$$F_{cor} = (4\dot{\theta(t)} \cos 2t, 4\dot{\theta}(t) \sin 2t, 0) = 4\dot{\theta(t)}\mathbf{Q}(t)$$

Esercizio 3 Si consideri l'equazione $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ in $\mathbb{R}^3$. Si mostri che l'equazione si può riscrivere nella forma $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2A\dot{\mathbf{Q}} - A^2\mathbf{Q}$, dove A è la matrice antisimmetrica con $A_{12} = -\Omega_3, A_{13} = \Omega_2, A_{23} = -\Omega_1$.

Soluzione Dal lemma 33.15 [G] sappiamo che $A\mathbf{q} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{q}$ e dall'osservazione 33.17 [G] sappiamo che $\mathbf{a} = (-A_{23}, A_{13}, A_{12}) = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \mathbf{\Omega}$.

Quindi riscrivo $\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} = A\dot{\mathbf{Q}}$ usando come $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{Q}}$ e riscrivo $\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) = A(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) = A^2\mathbf{Q}$ usando prima $\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}$ come vettore $\mathbf{q}$ e poi $\mathbf{Q}$.

Esercizio 4 Nel sistema di riferimento K considerato nell'esempio del pendolo di Foucault si consideri l'equazione
$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$$
con $\mathbf{\Omega} = (-\Omega\cos\lambda, 0, \Omega\sin\lambda)$, dove λ è notazione semplificata per λ_{eff}. Si mostri che la soluzione si può scrivere nella forma $\mathbf{Q}(t) = U(t)\mathbf{x}(t)$, dove $U(t) = e^{-At}$, con $A = \Omega\Lambda$ e
$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & 0 & \cos\lambda \\ 0 & -\cos\lambda & 0 \end{pmatrix}$$
e $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ risolve l'equazione $\ddot{\mathbf{x}} = U^{-1}\mathbf{F}$.

Soluzione Dall'esercizio 3 sappiamo che $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2A\dot{\mathbf{Q}} - A^2\mathbf{Q}$.

Cerchiamo una soluzione della forma $\mathbf{Q} = U\mathbf{x}$ dove $U = U(t)$ è una matrice da fissare. Si ha $\dot{\mathbf{Q}} = \dot{U}\mathbf{x} + U\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{Q}} = \ddot{U}\mathbf{x} + 2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + U\ddot{\mathbf{x}}$, così che l'equazione diventa
$$\ddot{U}\mathbf{x} + 2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + U\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} + 2A\dot{U}\mathbf{x} + 2AU\dot{\mathbf{x}} + A^2U\mathbf{x} = 0$$

Imponiamo che i termini con $\dot{\mathbf{x}}$ scompaiano dall'equazione, cioè che $2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + 2AU\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ Questo implica
$$\dot{U} + AU = 0 \Rightarrow U = e^{-At}M$$
dove M è una matrice arbitraria che per semplicità porremo fissare $M = \mathbb{I}$. Usando il fatto che $\dot{U} = -AU$, e quindi $\ddot{A} = A^2U$, l'equazione per $\mathbf{x}$ si semplifica notevolmente e si riduce a $U\ddot{x} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Osservando che U è invertibile, poiché $(e^{-At})^{-1} = e^{At}$ segue l'asserto.

Esercizio 5 Si considerino le equazioni

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\omega^2\xi + 2\Omega\dot{\eta}\sin\lambda + \omega^2(\zeta\sin\lambda\cos\lambda + \xi\sin^2\lambda) \\ \ddot{\eta} = -\omega^2\eta - 2(\Omega\dot{\zeta}\cos\lambda + \Omega\dot{\xi}\sin\lambda) + \Omega^2\eta \\ \ddot{\zeta} = -\omega^2\zeta + 2\Omega\dot{\eta}\cos\lambda + \omega^2(\xi\sin\lambda\cos\lambda + \zeta\cos^2\lambda) \end{cases}$$

che descrivono il pendolo di Foucault nell'approssimazione $3\lambda' = -m\omega^2$. In forma vettoriale, esse diventano

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \omega^2\mathbf{Q} - 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{Q})$$

Se ne trovi la soluzione senza compiere alcuna ulteriore approssimazione.

Soluzione Nel sistema di riferimento K del pendolo di Foucault si ha $\boldsymbol{\Omega} = (-\Omega\cos\lambda, 0, \Omega\sin\lambda)$ dove λ è notazione semplificata per λ_{eff}. Per l'esercizio 4 la soluzione è data da $\mathbf{Q}(t) = U(t)\mathbf{x}(t)$, dove $U(t) = e^{-At}$, con $A = \Omega\Lambda$ e $\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\mathbf{x}$. Si ha quindi $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, dove

$$x_k(t) = x_k(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}_k(0)}{\omega}\sin\omega t, \qquad k = 1,2,3$$

con i dati iniziali $\mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0)$ che si possono esprimere in termini dei dati iniziali $\mathbf{Q}(0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0)$; Infatti poiché $U(0) = \mathbb{1}$ e $\dot{U}(0) = -A$, si ha $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) - A\mathbf{x}(0)$, e quindi $\mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{Q}}(0) + A\mathbf{Q}(0)$. In componenti ciò equivale a :

$$\begin{cases} x_1(0) = \xi(0) \\ x_2(0) = \eta(0) \\ x_3(0) = \zeta(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x_1}(0) = \dot{\xi}(0) - \Omega\eta(0)\sin\lambda \\ \dot{x_2}(0) = \dot{\eta}(0) + \Omega(\xi(0)\sin\lambda + \zeta(0)\cos\lambda \\ \dot{x_3}(0) = \dot{\zeta}(0 - \Omega\eta(0)\cos\lambda) \end{cases}$$

Calcolando l'esponenziale di matrice e^{-At} si ottiene quindi

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ zeta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sin^2\lambda(\cos\Omega t - 1) & \sin\lambda\sin\Omega t & \sin\lambda\cos\lambda(\cos\Omega t - 1) \\ -\sin\lambda\sin\Omega t & \cos\Omega t & -\cos\lambda\sin\Omega t \\ \sin\lambda\cos\lambda(\cos\Omega t - 1) & \cos\lambda\sin\Omega t & 1+\cos^2\lambda(\cos\Omega t - 1) \end{pmatrix}$$

Usando le espressioni esplicite di $\mathbf{x}(t)$ in termini dei dati iniziali $\mathbf{Q}(0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0)$ si ottiene infine l'espressione completa di $\mathbf{Q}(t)$.