

FM210 - Soluzioni Tutorato 4  
Università degli Studi Roma Tre  
Dipartimento di Matematica e Fisica  
Docente: Livia Corsi  
Tutore: Shulamit Terracina

30 Aprile 2020

**Esercizio 1** Si consideri un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$

**Soluzione**

1. Poichè  $m = 1$  il potenziale efficace è dato da

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho + \frac{L^2}{2\rho^2}, \quad L \neq 0$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^3}$$

Il sistema dinamico associato è quindi 
$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} - \frac{dV_{eff}}{d\rho} = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

2. Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione  $V'_{eff}(\rho) = 0$  vediamo che questa ha soluzione se e solo se  $L^2 \leq 1$ . In particolare avremo quindi:

- Per  $L^2 > 1$  nessun punto di equilibrio.
- Per  $L^2 = 1$  un solo punto di equilibrio  $P_0 = (1, 0)$ .
- Per  $L^2 \leq 1$  due punti di equilibrio  $P_{\pm} = (\rho_{\pm}, 0)$ , con

$$\rho_{\pm} = \sqrt[3]{1 \pm \sqrt{1 - L^2}}$$

Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2} = -3\rho^2 + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

quindi se  $L^2 = 1$  avremo che  $\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2} < 0 \quad \forall \rho \neq 1$ , cioè  $\rho = 1$  è un punto di sella del potenziale dunque  $P_0$  è instabile. Per  $L^2 > 1$  invece si ha  $\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2}(\rho_-) > 0$  quindi  $\rho_-$  è un minimo del potenziale e dunque  $P_-$  è stabile, viceversa  $\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2}(\rho_+) < 0$  quindi  $\rho_+$  è un massimo del potenziale e dunque  $P_+$  è instabile.

3. Indipendentemente dal valore di  $L$  si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

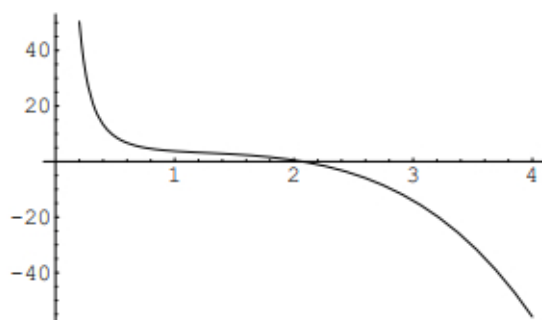


Figura 1: Grafico qualitativo del potenziale efficace per  $L^2 > 1$

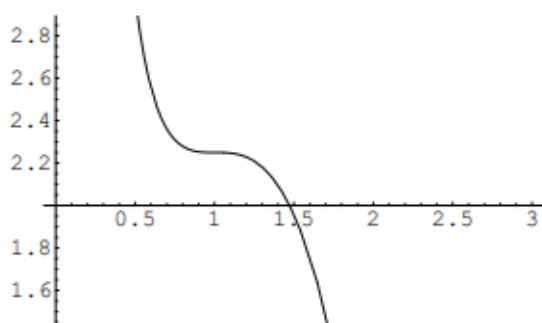


Figura 2: Grafico qualitativo del potenziale efficace per  $L^2 = 1$

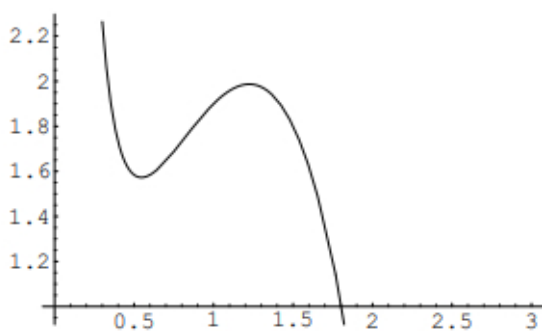


Figura 3: Grafico qualitativo del potenziale efficace per  $L^2 < 1$

4. Da  $E = y^2/2 + V_{eff}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(A - V_{eff}(\rho))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ . Suddividiamo il problema in tre casi.

**Caso 1** Se  $L^2 > 1$  per ogni valore di energia avremo una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$

**Caso 2** Se  $L^2 = 1$ :

- Per  $E < V_{eff}(1)$  avremo una curva aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$
- Per  $E = V_{eff}(1)$  avremo due traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$  e con  $\lim_{\rho \rightarrow 1} y(\rho) = 0$  con tangenza orizzontale e il punto d'equilibrio instabile  $(1, 0)$ .
- Per  $E \geq V_{eff}(1)$  avremo una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = +\infty$

**Caso 3** Se  $L^2 = 1$ :

- Per  $E < V_{eff}(\rho_-)$  avremo una traiettoria aperta con

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$$

- Per  $E = V_{eff}(\rho_-)$  avremo una traiettoria aperta con

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$$

e con il punto d'equilibrio stabile  $P_-$ .

- Per  $V_{eff}(\rho_-) < E < V_{eff}(\rho_+)$  avremo una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$  ed una periodica attorno al punto d'equilibrio stabile  $P_-$ .
- Per  $E = V_{eff}(\rho_+)$  avremo il punto instabile  $P_+$ , due traiettorie aperte tali che  $\lim_{\rho \rightarrow \rho_-} y(\rho) = 0$ ,  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$  rispettivamente e una traiettoria omoclina al punto instabile con tangenza obliqua.
- Per  $E > V_{eff}(\rho_+)$  avremo una traiettoria aperta con

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = +\infty$$

5. . Per quanto visto al punto precedente si hanno traiettorie periodiche solo nel caso  $L^2 < 1$  solo per dati iniziali  $\rho_- < \rho < \rho_+$  e valori dell'energia  $V_{eff}(\rho_-) < E < V_{eff}(\rho_+)$  .

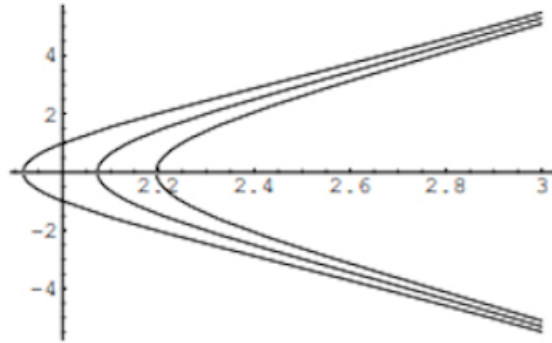


Figura 4: Piano delle fasi per  $L^2 > 1$

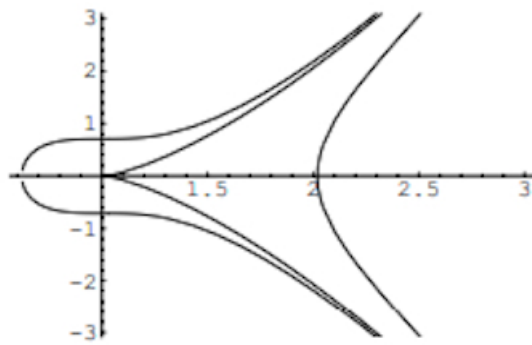


Figura 5: Piano delle fasi per  $L^2 = 1$

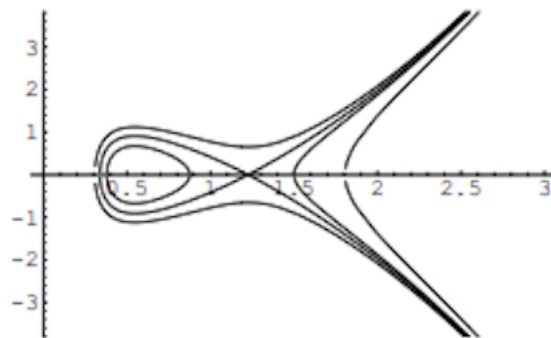


Figura 6: Piano delle fasi per  $L^2 < 1$

**Esercizio 2** Si consideri un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si risponda alle domande seguenti al variare del parametro  $\alpha$  e del modulo  $L$  del momento angolare.

1. Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$
6. Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico

### Soluzione

1. Poichè  $m = 1$  il potenziale efficace è dato da

$$V_{eff}(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2} + \frac{L^2}{2\rho^2} = \log \rho + \frac{\beta}{\rho^2}, \quad \beta = L^2 - \frac{\alpha}{2}$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^3}$$

Il sistema dinamico associato è quindi 
$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} - \frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^3} \end{cases}$$

2. Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione  $V'_{eff}(\rho) = 0$  vediamo che questa ha soluzione se e solo se  $\beta > 0$ . In particolare avremo quindi:

- Per  $\beta > 0$  un solo punto di equilibrio  $P_0 = (\sqrt{\beta}, 0)$
- Per  $\beta \leq 0$  nessun punto di equilibrio

Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2 V_{eff}}{d\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{3\beta}{\rho^4}$$

quindi se  $\beta > 0$  avremo che  $\frac{d^2 V_{eff}}{d\rho^2}(\rho_0) = \frac{2}{\beta} > 0$ , cioè  $P_0$  è un punto di equilibrio instabile.

3. Indipendentemente dal valore di  $L$  si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

E inoltre si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = \pm\infty$$

dove il segno dipende dal segno di  $L$

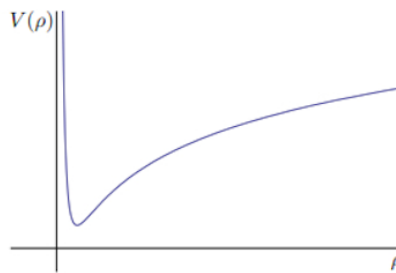


Figura 7: Grafico qualitativo del potenziale efficace per  $\beta > 0$

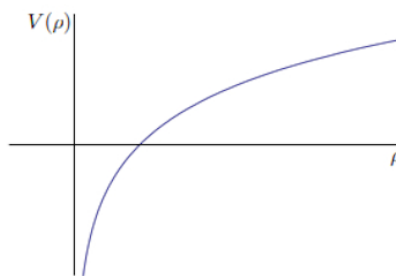


Figura 8: Grafico qualitativo del potenziale efficace per  $\beta \leq 0$

4. Da  $E = y^2/2 + V_{eff}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(A - V_{eff}(\rho))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ . Suddividiamo il problema in due casi.

**Caso 1** Se  $\beta \leq 0$  per ogni valore di energia avremo una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = -\infty$

**Caso 2** Se  $\beta > 0$ :

- Per  $E = V_{eff}(\rho_0)$  avremo il punto di equilibrio stabile  $P_0$
- Per  $E > V_{eff}(\rho_0)$  avremo traiettorie chiuse attorno al punto di equilibrio  $P_0$

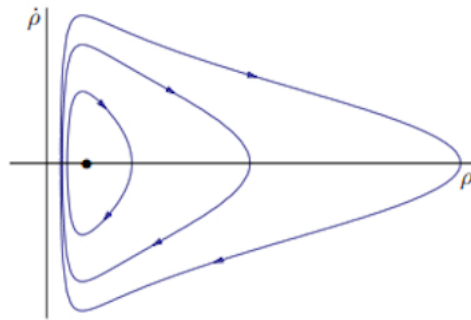


Figura 9: Piano delle fasi per  $\beta > 0$

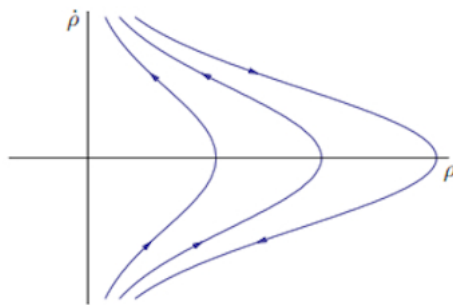


Figura 10: Piano delle fasi per  $\beta \leq 0$



5. Alla luce di quanto visto al punto precedente si hanno traiettorie periodiche solo nel caso  $\beta > 0$  e  $E > V_{eff}(\rho_0)$ .
6. Un caso in cui il moto complessivo è sicuramente periodico è quello in cui la variabile radiale si muove di moto banale, cioè,  $\rho(t) \equiv \text{cost.}$ , che è un caso che si verifica per  $\beta > 0$  e dato iniziale corrispondente al punto di equilibrio  $P_0$ . In questo caso  $\rho(t) \equiv \sqrt{\beta}$  mentre  $\theta$  si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_{eq}^2}t = \theta_0 + \frac{L}{\beta}t$$

che corrisponde a un moto complessivo circolare uniforme di periodo

$$T = \frac{2\pi m\rho_{eq}^2}{L} = \frac{2\pi\beta}{L}$$

Se invece il moto radiale è periodico non banale di periodo  $T_0$ , la condizione necessaria affinché il moto complessivo sia periodico è che l'incremento della variabile angolare in un periodo  $T_0$ ,  $\Delta\theta = \omega_1 T_0$  con

$$\omega_1 = \frac{2}{T_0} = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - \log \rho - \frac{\beta}{2\rho^2})}}$$

sia multiplo razionale di  $2\pi$  (dove  $\rho_{\pm}$  sono le soluzioni di  $E = V_{eff}(\rho)$ )

In caso contrario il moto complessivo è quasi-periodico e riempie densamente una regione bidimensionale dello spazio (sia dello spazio fisico che dello spazio delle fasi).

**Esercizio 3** In classe avete visto che se  $L \neq 0$ , l'orbita su cui si svolge il moto in un campo centrale è data dall'equazione

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff})},$$

che prende il nome di prima forma dell'equazione delle orbite. Ora, verificate che, posto  $u = 1/\rho$ , tale equazione si può riscrivere come

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[ V\left(\frac{1}{u}\right) \right]$$

che prende il nome di seconda forma dell'equazione delle orbite.

**Soluzione** Poniamo  $u = 1/\rho$  e ricordiamo  $\dot{\theta} = L(\mu\rho^2)^{-1} = Lu^2/\mu$ .

Poiché le funzioni  $\theta = \theta(t)$  e  $u = u(\rho)$  sono invertibili, abbiamo

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left[ u^2 \left( \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \right] = -\frac{d}{d\theta} \left[ u^2 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right) \right] = -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \left[ \dot{\theta} \frac{d\rho}{d\theta} \right] =$$

$$-\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{d\theta}{dt} \frac{d\rho}{d\theta} \right] = -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\mu}{L} \frac{dt}{d\theta} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu}{L\dot{\theta}} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{L^2u^2} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{L^2u^2} \ddot{\rho}.$$

Allora, utilizzando l'identità

$$\frac{dV_{eff}}{d\rho} = \frac{dV_{eff}}{du} \frac{du}{d\rho} = -u^2 \frac{dV_{eff}}{du},$$

possiamo scrivere l'equazione radiale  $\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho}(\rho)$  nella forma

$$\frac{L^2u^2}{\mu} \frac{d^2u}{d\theta^2} = \mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho}(\rho) = u^2 \frac{dV_{eff}}{du}$$

che implica

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[ V \left( \frac{1}{u} \right) \right]$$