FM210 - Soluzioni Tutorato 2
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

9 Marzo 2019

Esercizio 1 Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = x^2 - x$$

1. Si determini una grandezza conservata del moto.
2. Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi.
3. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti chiusi aperiodici.

Soluzione

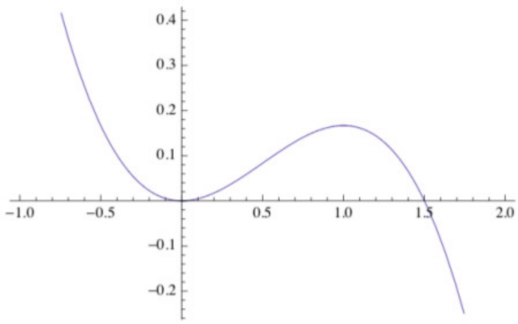
1. L'energia $E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ è conservata:

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + x - x^2) = 0$$

2. Le curve di livello per un'energia E fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - V(x))} = \pm\sqrt{2(E - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})}$$

Il grafico di $V(x)$ è:



$V(x)$ ha un minimo in 0 e un massimo in 1, e $V(0) = 0$, $V(1) = 1/6$, $\lim_{x\to\pm\infty} V(x)) = \pm\infty$; Inoltre V decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $(0, 1)$ e decresce in $(1, \infty)$. Quindi

- $E < 0$, $\dot{x}(x)$ e definito per $x \geq x_E$ dove x_E è l'unica soluzione di $V(x_E) = E$, e $\dot{x}(x_E) = 0$, e

$$\frac{d}{dx}\dot{x}\bigg|_{x=x_E+\epsilon} = -\frac{V'(x_E+\epsilon}{2\sqrt{2(E - V(x_E+\epsilon))}}$$

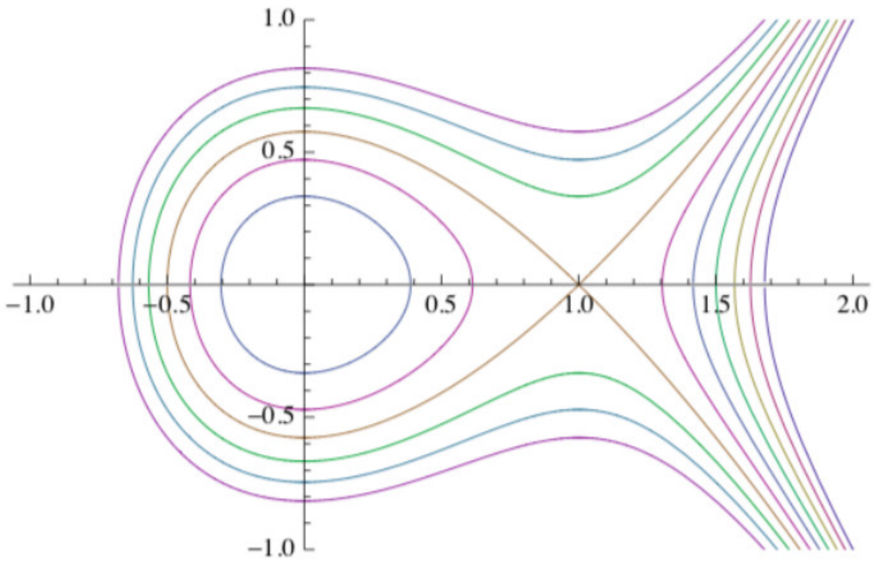
  con $V'(x_E) \neq 0$ quindi $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ (dove il $'$ significa una derivata rispetto a x). Inoltre $\dot{x}(x) \to \pm\infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.

- se $0 < E < 1/6$, $\dot{x}(x)$ e definito per $x \in [x_E^{(-)}, x_E(+)]$ e per $x \geq x_E$ e per $x^{(\pm)}$ e x_E sono le tre soluzioni di $V(x^{(\pm)}) = E$. Abbiamo $\dot{x}'(x^{(\pm)}) = \pm\infty$, $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.

- se $E > 1/6$, $\dot{x}(x)$ e definito per $x \geq x_E$ dove x_E è l'unica soluzione di $V(x_E) = E$, e $\dot{x}(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.

- se $E = 0$, $\dot{x}(x)$ e definito per $x = 0$, nel qual caso $\dot{x}(x) = \dot{x}(0) = 0$, e per $x \geq x_0$ dove x_0 è la seconda soluzione $V(x_0) = 0$, nel qual caso la traiettoria ha le stesse proprietà qualitative di quelle aperte a energia negativa.

- se $E = 1/6$, $\dot{x}(x)$ e definito per $x \in [x_E^{(-)}, 1]$ e per $x \in [1, \infty)$ dove $x_E^{(-)}$ è la prima delle due soluzioni di $V(x_E^{(-)}) = E$. Abbiamo $\dot{x}'(x_E^{(-)}) = \pm\infty$, $\dot{x}'(1) = \pm 1$. Inoltre $\dot{x}(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito. Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate nel seguente grafico



3.
   - se $x(0) \geq x_E$ dove x_E è la più grande delle soluzioni di $V(x_E) = E$, $E \neq 1/6$, allora il moto è aperto.
   - se $0 < E < 1/6$, $x(0)[x_E^{(-)}, x_E(+)]$ e per $x_E^{(\pm)}$ sono le due soluzioni più piccole di $V(x_E^{(\pm)}) = E$, allora $V'(x_E^{(\pm)}) \neq 0$ quindi il moto è chiuso e periodico.
   - se $E = 0$ e $x(0) = 0$, il moto è costante, quindi chiuso e periodico.
   - se $E = 1/6$ e $x(0) > 1$, allora il moto è aperto.
   - se $E = 1/6$ e $x(0) < 1$, allora il moto ‘e chiuso, e come $V'(1) = 0$, sarà aperiodico.

Esercizio 2 Per ognuno dei seguenti potenziali $V(x)$, considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a tale potenziale e

1. Scrivere esplicitamente l’equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell’energia meccanica $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$.
2. Si disegni il grafico dell’energia potenziale.
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
4. Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi
5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, a moti aperti e a moti chiusi aperiodici.
6. ??Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito??

Potenziali :

- a) $V(x) = x + 2\sin x$
- b) $V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$
- c) $V(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$

Soluzione a

1. L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = -V'(x) = -2\cos x$$

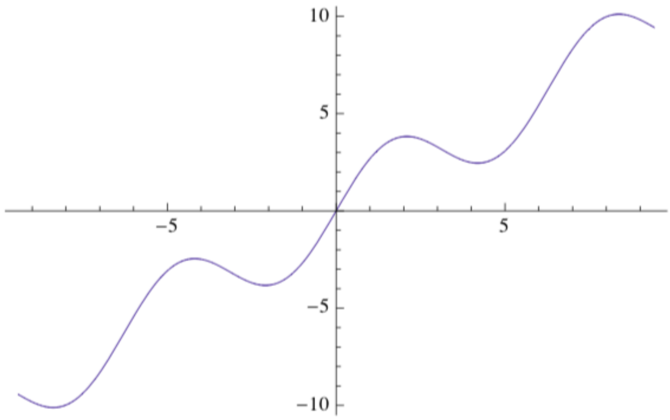
   L'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$$

   è una grandezza conservata (un integrale primo del moto):

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + 1 + 2\cos x) = 0$$

2. Il grafico dell'energia potenziale:



3. I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici dell'energia potenziale (ossia gli x tali che $U'(x) = 0$) sono

$$a_k := \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, b_k := -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Gli a_k son massimi e i b_k sono minimi. Inoltre abbiamo

$$V(a_k) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}, \qquad V(b_k) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3}$$

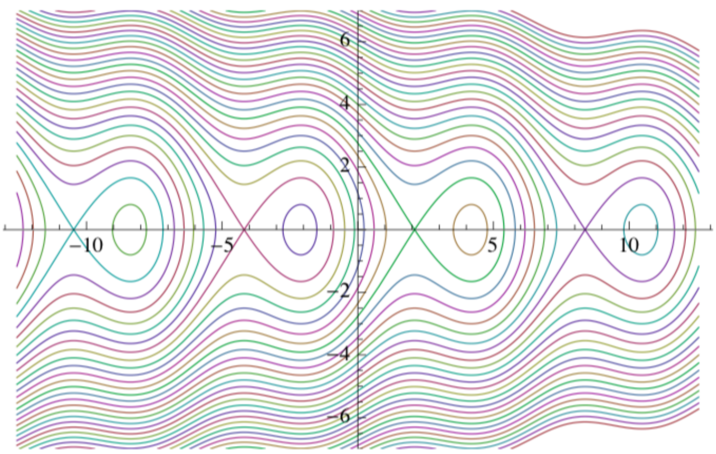
quindi $V(b_{k+1}) > V(b_{k-1})$ (perchè $\frac{4\pi}{3} > 4 > 2 > \sqrt{3}$).

4. Le curve di livello per una energia E fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - V(x))} = \pm\sqrt{2(E - x - 2\sin x)}.$$

- Se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$, $V(x) = E$ ha 3 soluzioni: $x_E < x_E^{(-)} < x_E^{(+)}$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leq x_E$ e per $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$. Come $V'(x_E^{(\pm)}) \neq 0$ e $V'(x_E) \neq 0$, $\dot{x}'(x_E^{(\pm)}) = \pm\infty$ e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.
- Se $E \in (V(a_{k-1}), V(b_{k+1}))$, $V(x) = E$ ha una soluzione: x_E,e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leq x_E$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.
- Se $E = V(b_k)$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x = b_k$ e per $x \leq x_E$ dove x_E è la soluzione di $V(x_E) = E$ diversa da b_k, $\dot{x}(b_k) = 0$, $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ e $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.
- Se $E = V(a_k)$, $V(x) = E$ ha due soluzioni: $a_k < x_E$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leq a_k$ e per $x \in [a_k, x_E]$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$, $\dot{x}'(a_k) = \pm 3^{1/4}/2$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.

Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate:



5. Usando il ragionamento della domanda precedente, troviamo che
   - se $x(0) \leq x_E$ dove x_E è la più piccola delle soluzioni di $V(x_E) = E$ e se $E \neq V(a_k)$ allora il moto non è limitato.
   - se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$ e $x(0) \in (b_{k+1}, a_k)$ allora il moto è limitato e periodico.
   - se $E = V(b_k)$ e $x(0) = b_k$ allora il moto è costante.
   - se $E = V(a_k)$ e $x(0) > a_k$ allora il moto è limitato e aperiodico.

Soluzione b

1. L'equazione del moto è
$$\ddot{x} = x^3 - x \tag{1}$$
Si verifica immediatamente che l'energia meccanica $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ è una costante del moto, infatti
$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x}\dot{x} - x^3\dot{x} + x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} - (x^3 - x)) = 0 \tag{2}$$
usando (1).

2. Innanzitutto dobbiamo trovare i punti di equilibrio, ovvero i punti in cui si annulla la derivata del potenziale:
$$V'(x) = -x^3 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1. \tag{3}$$
Quindi: Esistono tre punti di equilibrio: $(x(0), \dot{x}(0)) = (0,0), (\pm 1, 0)$. Inoltre
$$V'(x) = x(1 - x^2) \begin{cases} > 0 \text{ se } 0 < x < 1 \text{ oppure } x < -1 \\ < 0 \text{ se } \; -1 < x < 0 \text{ oppure } x > 1 \end{cases} \tag{4}$$
e $V''(x) = -3x^2 + 1$, cosicché $V''(0) = 1 > 0$, $V''(\pm 1) = -2 < 0$, quindi
   - $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile (perché punto 0 di minimo isolato del potenziale e quindi localmente $(0,0)$ è un minimo isolato dell'energia meccanica, quindi le curve di livello di E sono curve chiuse comprese tra due ellissi. Ma allora dato che le traiettorie del sistema dinamico vivono sulle curve di livello di E, se parto su una di queste curve chiuse vicino a $(0,0)$ rimango lì vicino. Quindi per definizione è stabile)
   - $(\pm 1, 0)$ sono due punti di equilibrio instabili (criterio del linearizzato).

   I grafici delle curve di livello hanno la forma descritta in figura (2).

   Essendo $V(0) = 0$, $V(\pm 1) = \frac{1}{4}$, otteniamo che:
   - Se il sistema parte con velocita nulla su uno dei punti di equilibrio, allora il moto è costante.
   - Se $E > \frac{1}{4}$ i moti sono aperti per tutti i dati iniziali.

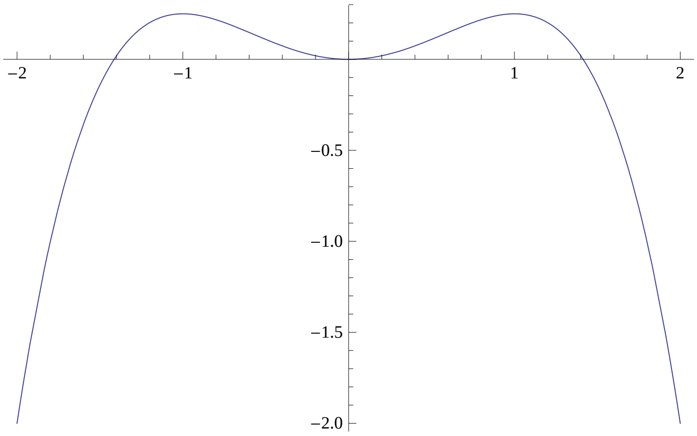


Figura 1: Grafico di $V(x) = -x^4/4 + x^2/2$

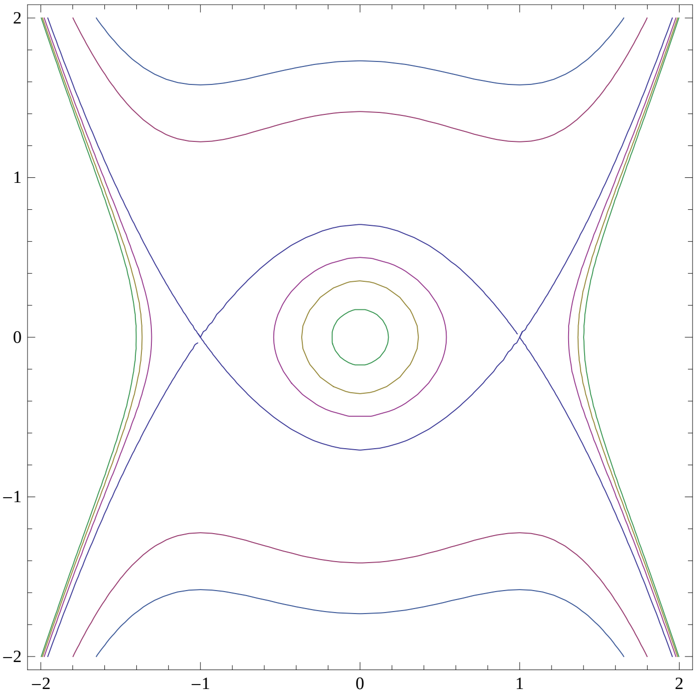


Figura 2: Curve di livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$

- Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| < 1$, il moto è periodico intorno al minimo del potenziale.
- Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| > 1$, il moto è aperto.
- Se $E = 1/4$ e $x(0) \in (-1, 1)$ il moto è limitato e a periodico, e asintotico nel passato e nel futuro a ± 1, a seconda del valore iniziale della velocità (se $\dot{x}(0) > 0$, allora $\lim_{t\to\pm\infty} = \pm 1$, e viceversa). Se $E = 1/4$ e $x(0) < -1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro

a -1, a seconda che $\dot{x}(0)$ sia negativa/positiva. Se $E = 1/4$ e $x(0) > 1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro a 1, a seconda che $\dot{x}(0)$ sia positiva/negativa.

Consideriamo $0 < E < \frac{1}{4}$, e chiamiamo $x_E^{(\pm)}$ le due soluzioni dell'equazione $E = V(x)$ tali che $x_E^{(\pm)} \in (-1, 1)$. Allora, il tempo che la particella impiega per arrivare da $x_E^{(-)}$ a $x_E^{(+)}$ è

$$t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)}) = \int_{t(x_E^{(-)})}^{t(x_E^{(+)})} ds = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}. \quad (5)$$

Per calcolare il periodo del moto dobbiamo sommare il tempo di andata e quello di ritorno, quindi

$$T = 2[t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)})] = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = \sqrt{2}\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (6)$$

Soluzione c

1. L'equazione del moto è $\ddot{x} = xe^{x^2}$. Si verifica immediatamente che l'energia meccanica è conservata, infatti

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}e^{x^2} \\ \frac{dE}{dt} &= \dot{x}\ddot{x} - x\dot{x}e^{x^2} = \dot{x}(\ddot{x} - xe^{x^2}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

2. Notiamo prima di tutto che $V(x) \leq -1/2$ per ogni x. Inoltre

$$V'(x) = -xe^{x^2} \begin{cases} > 0 \text{ se } x < 0 \\ = 0 \text{ se } x = 0 \\ < 0 \text{ se } x > 0 \end{cases} \quad (8)$$

e

$$V''(x) = -e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} < 0 \text{ per ogni } x \quad (9)$$

Quindi l'unico punto fisso del sistema è $(x, \dot{x}) = (0, 0)$, ed è un punto di equilibrio instabile. Per tutti gli altri dati iniziali, i moti sono moti aperti, non ci sono moti periodici. Il grafico del potenziale e delle curve di livello sono nelle figure (3) e (4).

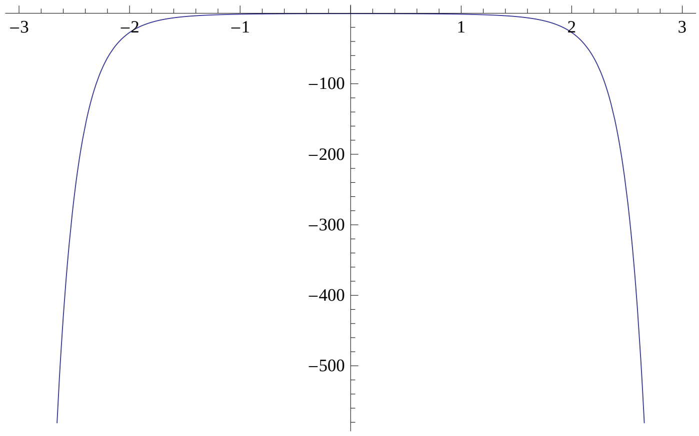


Figura 3: Grafico di $V(x) = -\frac{e^{x^2}}{2}$

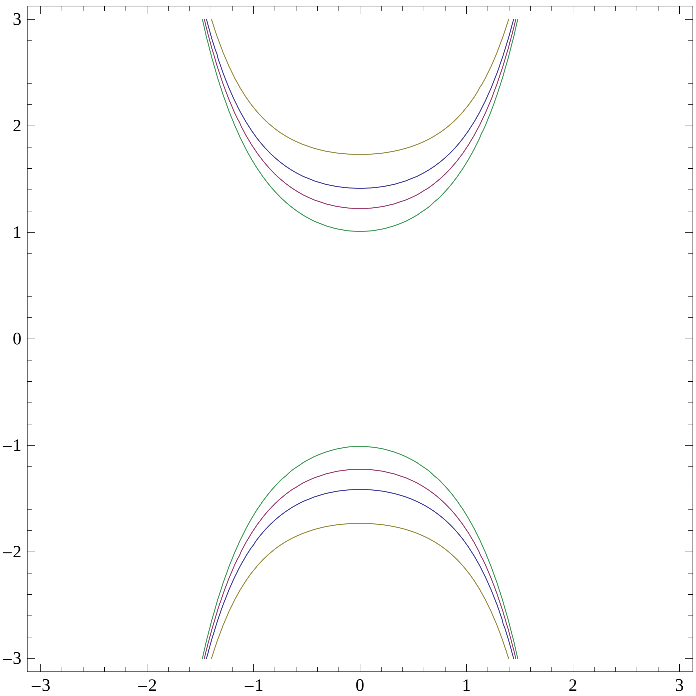


Figura 4: Grafico delle curve li livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$. Nota: i valori in figura corrispondono tutti a valori di E maggiori di $-1/2$. La separatrice e le curve con $E < -1/2$ non sono riportate esplicitamente.

Esercizio 3 Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $/R$,

$$\ddot{x} = -V'(x), \qquad V(x) = \frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$$

1. Si determino i punti di equilibrio al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.
2. Si studi la stabilità dei punti di equilibrio (non degeneri).

3. Si determini l'energia del sistema.
4. Si verifichi che E è una costante del moto.

Soluzione 1. I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici dell'energia potenziale, ossia gli x tali che $V'(x) = x^3 + \alpha x = x(x^2 + \alpha) = 0$.

- se $\alpha > 0$ abbiamo un unico punto di equilibrio: $x_0 = 0$
- se $\alpha < 0$ abbiamo tre punti di equilibrio: $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$

2. La stabilità si determina calcolando la derivata seconda dell'energia potenziale nei punti di equilibrio (per i punti stabili si veda la spiegazione al punto 2 della soluzione b es 2)

- se $\alpha > 0$ il punto $x_0 = 0$ è un punto di equilibrio stabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha|_{x=0} = \alpha > 0$$

  e quindi $x_0 = 0$ è un punto di minimo del potenziale.

- se $\alpha < 0$ (a) il punto $x_1 = 0$ e un punto di equilibrio instabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha|_{x=0} = \alpha < 0$$

  e quindi $x_1 = 0$ è un punto di massimo del potenziale. (b) i punti $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono due punti di equilibrio stabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha|_{x=\pm\sqrt{-\alpha}} = -3\alpha + \alpha = -2\alpha > 0$$

  e quindi $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono due punti di minimo del potenziale.

3. L'energia del sistema è $E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$
4. E è una costante del moto, infatti

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + x^3 + \alpha x) = \dot{x}(-V'(x) + +x^3 + \alpha x) = \dot{x}(-x^3 - \alpha x + x^3 + \alpha x) = 0$$