**Corso di Laurea in Matematica**
**Anno Accademico 2021/2022**

# FM310 - Istituzioni di Fisica Matematica

Secondo esonero (11-1-2022)

(due pagine)

Esercizio 1. Sia $H(x,t)$ il nucleo del calore. Calcolare $m_{2k}(H(\cdot,t))$ per ogni $k \geq 1$.
*Sugg. Può essere utile calcolare le derivate $k$-esime della funzione*

$$G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2/2} dx.$$

Esercizio 2. Si consideri un sistema quantistico unidimensionale descritto dall'Hamiltoniana

$$H(Q,P) = T + V = \frac{P^2}{2m} + \lambda Q^4, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se $|\psi\rangle$ è un'autostato di H, dimostrare che

$$\langle\psi|T|\psi\rangle = 2\langle\psi|V|\psi\rangle.$$

*Sugg. Può essere utile ricordare che*

$$[P,H] = i\hbar\, V'(Q).$$

Esercizio 3. Siano

$$f, g \in L^2 := \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,, \|u\| := \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx < +\infty\},$$

tali che

$$\|f\|, \|g\| \neq 0, \qquad \langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx < +\infty,$$

e definiamo

$$\theta(f,g) := \arccos(\frac{\mathrm{Re}\langle f,g\rangle}{\|f\|\|g\|}).$$

Se $\hat{f}$, $\hat{g}$ sono le trasformate di Fourier di $f$, $g$ rispettivamente, mostrare che

$$\theta(f,g) = \theta(\hat{f},\hat{g}),$$

i.e. la trasformata di Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ "preserva gli angoli".

<u>Esercizio 4.</u> Sia $A$ un operatore tale che

$$AA^\dagger + A^\dagger A = \mathbb{1} \qquad A^2 = (A^\dagger)^2 = 0$$

(4.1) Può $A$ essere hermitiano?
(4.2) Dimostrare che i soli autovalori possibili per l'operatore $B := A^\dagger A$ sono 0 e 1.

<u>Esercizio 5.</u> Sia $Q := (0,1)^2$, i.e. il quadrato di lato 1 e sia $u(x,t)$ soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & x = (x_1, x_2) \in Q \\ u(x,0) = x_1^2 & \\ u(x,t) = 0, & x \in \{0\} \times [0,1] \\ u(x,t) = 1, & x \in \{1\} \times [0,1] \\ u(x,t) = x_1, & x \in [0,1] \times \{0,1\}. \end{cases}$$

Calcolare $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

<u>Esercizio 6.</u> Dimostrare che se per un sistema quantistico $F$ e $G$ sono costanti del moto, allora lo è anche $[F,G]$.

<u>Esercizio 7.</u> Determinare gli stati legati dispari del sistema quantistico descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(Q), \qquad V(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ -V_0, & |x| < 1. \end{cases}$$

**Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche.**
**Non è necessario (ma è comunque apprezzato) calcolare gli integrali esplicitamente.**