**Corso di Laurea in Matematica**
**Anno Accademico 2022/2023**

# FM310 - Istituzioni di Fisica Matematica

Secondo esonero (11-1-2023)

(due pagine)

Esercizio 1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $u(x,t)$ la soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u, & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Mostrare che

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Esercizio 2. Una particella quantistica si muove nello spazio tridimensionale, sotto l'azione dell'Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}|P|^2 + V(Q)$$

dimostrare che

$$P_j = -i\frac{m}{\hbar}[Q_j, H], \qquad j = 1,2,3$$

e usare tale relazione per dimostrare che in uno stato stazionario $|\psi_E\rangle$ si ha

$$\langle \psi_E | P | \psi_E \rangle = 0$$

Esercizio 3. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ continua nel punto $x_0$. Mostrare che

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Big( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{i\xi x_0} \hat{f}(\xi) d\xi \Big) dR = f(x_0)$$

Esercizio 4. Un oscillatore armonico quantistico di massa $m$ e frequenza $\omega$ si trova al tempo $t = 0$ in uno stato tale che

1. misurando l'osservabile $aa^\dagger$ si trovano solo i valori 1 e 3
2. $\langle a^\dagger a \rangle = 1/2$, e $\langle aa + a^\dagger a^\dagger \rangle = 0$

(4.1) Determinare lo stato più generale che soddisfa queste condizioni.
(4.2) Calcolare in funzione del tempo il valor medio del potenziale.

ESERCIZIO 5. Sia $Q := (0,1)^2$, i.e. il quadrato di lato 1 e sia $u(x,t)$ soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & x = (x_1, x_2) \in Q \\ u(x,0) = x_1^2 - \sin(x_2) \\ u(x,t) = 0, & x \in \{0\} \times [0,1],\ t \neq 0 \\ u(x,t) = 1, & x \in \{1\} \times [0,1],\ t \neq 0 \\ u(x,t) = x_1, & x \in [0,1] \times \{0,1\},\ t \neq 0. \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{t \to +\infty} u(x,t)$.

ESERCIZIO 6. Dati tre osservabili $A, B, C$, dimostrare che se $[A,B] = [A,C] = 0$ ma $[B,C] \neq 0$ allora lo spettro di $A$ è degenere.

ESERCIZIO 7. L'Hamiltoniano di un sistema quantistico a due livelli è descritto dal seguente operatore

$$H|1\rangle = |1\rangle + e^{i\pi/4}|2\rangle, \qquad H|2\rangle = e^{-i\pi/4}|1\rangle$$

dove $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono gli autostati normalizzati di un altro operatore hermitiano $A$ con autovalori $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ rispettivamente. All'istante $t = 0$ si esegue una misura dell'osservabile associato ad $A$ e si trova $-\sqrt{2}$. Immediatamente dopo si esegue una misura di $H$: qual è la probabilità di trovare il sistema nello stato fondamentale?

**Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche. Non è necessario (ma è comunque apprezzato) calcolare gli integrali esplicitamente.**