**Corso di Laurea in Matematica**
**Anno Accademico 2021/2022**

# FM310 - Istituzioni di Fisica Matematica

Primo esonero (8-11-2021)

(due pagine)

Esercizio 1. Determinare autofunzioni e autovalori dell'operatore $\partial_x^2$ sullo spazio

$$C^2_{0,N}([0,2\pi]) := C([0,2\pi]) \cap C^2((0,2\pi)) \cap \{u(0) = \partial_x u(2\pi) = 0\}$$

ed utilizzare il risultato ottenuto per risolvere il problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = x(2\pi - x)^2 t \\ u(x,0) = 0 \\ \partial_t u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = \partial_x u(2\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ e $t_0 > 0$. Dimostrare che $u(x,t)$ risolve

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x^2 u, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

per ogni $t > 0$, se e solo se risolve

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x^2 u, \\ u(x,t_0) = \mathbf{H}(t_0)[f](x) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

per ogni $t > t_0$, dove $\mathbf{H}(t)$ è l'operatore di convoluzione con il nucleo del calore.

Esercizio 3. Determinare le caratteristiche e le soluzioni dell'equazione

$$x\partial_t u - t\partial_x u = 0.$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione limitata dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \partial_x u(0,t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

Esercizio 5. Si consideri l'equazione

$$\partial_t^2 u - \Delta u + mu = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

dove $m > 0$ è un parametro. Mostrare che

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \Big( (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 + mu^2 \Big) dx$$

è una costante del moto.

Esercizio 6. Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $g \in C(\mathbb{R}^3)$ tali che

$$\mathrm{supp}(f), \mathrm{supp}(g) \subseteq B_1(0),$$

e sia $u(x,t)$ soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \partial_t u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Mostrare che esiste una costante $C$ tale che

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{|t|}.$$

*Sugg. Può essere utile utilizzare la formula di Kirchhoff.*

Esercizio 7. Siano $u_D(x,t)$ e $u_N(x,t)$ soluzioni di

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x^2 u \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 \end{cases} \qquad \text{e di} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x^2 u \\ u(x,0) = f(x) \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(2\pi,t) = 0 \end{cases}$$

rispettivamente. Dimostrare che se $f(x) \geq 0$ allora $u_D \leq u_N$. Dimostrare che vale l'uguale se e solo se $f \equiv 0$.

**Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche.**
**Non è necessario (ma è comunque apprezzato) calcolare gli integrali esplicitamente.**