**Corso di Laurea in Matematica**
**Anno Accademico 2021/2022**

# FM310 - Istituzioni di Fisica Matematica

Primo esonero (8-11-2022)

(due pagine)

<u>Esercizio 1.</u> La propagazione delle onde elettromagnetiche è governata dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t E = \nabla_x \times B - 4\pi j \\ \partial_t B = -\nabla_x \times E \\ \nabla_x \cdot E = 4\pi\rho \\ \nabla_x \cdot B = 0 \end{cases}$$

dove $E, B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sono il campo elettrico e il campo magnetico rispettivamente, $j : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è la densità di corrente elettrica e $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la densità di carica. Mostrare che nel caso di propagazione nel vuoto (ovvero se $\rho \equiv 0$ e $j \equiv 0$), le equazioni di Maxwell sono equivalenti a sei equazioni delle onde (una per ogni componente di ciascun campo).
*Sugg. Può essere utile mostrare che dato un campo vettoriale* $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *si ha* $\nabla \times (\nabla \times V) = -\Delta V + \nabla(\nabla \cdot V)$.

<u>Esercizio 2.</u> Si consideri l'equazione delle onde su $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \partial_t u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

nei seguenti due casi

1. $$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \qquad g(x) \equiv 0$$

2. $$f(x) \equiv 0 \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

(2.1) Determinare se esistono punti $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ in cui la soluzione $u(x,t)$ è discontinua.
(2.2) Determinare se esistono punti $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ in cui $\partial_x u(x,t)$ è discontinua.

<u>Esercizio 3.</u> Scrivere la soluzione dell'equazione di trasporto

$$\begin{cases} \partial_t u - tx\partial_x u = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

In particolare se $\mathrm{Supp}(f) \subseteq [-R,R]$, determinare

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$$

per ogni $x \neq 0$.

<u>Esercizio 4.</u> Determinare la soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2}\partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nei seguenti casi

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = \sin(kx)$
3. $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Determinare il comportamento asintotico della soluzione nel limite $t \to +\infty$. Da quali proprietà del dato iniziale dipende tale comportamento?

<u>Esercizio 5.</u> Sia $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ consideri l'equazione

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = f(x_1, x_2) \\ \partial_t u(x,0) = g(x_1, x_2) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

Mostrare che la soluzione non dipende da $x_3$. Descrivere la natura di tale soluzione nel caso in cui

$$\mathrm{supp}(f), \mathrm{supp}(g) \subseteq B_R(0) := \{x_1^2 + x_2^2 < R\},$$

commentando in particolare sul principio di Huygens.

<u>Esercizio 6.</u> Determinare autofunzioni e autovalori dell'operatore $\partial_x^2$ sullo spazio

$$C^2_{0,N}([0,2\pi]) := C([0,2\pi]) \cap C^2((0,2\pi)) \cap \{\partial_x u(0) = \partial u(2\pi) = 0\}$$

ed utilizzare il risultato ottenuto per risolvere il problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \partial_t u(x,0) = 0 \\ \partial_x u(0,t) = \cos(t) \\ u(2\pi, t) = \sin(t) \end{cases}$$

**Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche.**
**Non è necessario (ma è comunque apprezzato) calcolare gli integrali esplicitamente.**