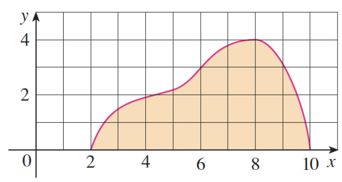
Esercizi - settimana 9

Livia Corsi

Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre, Roma, I-00146, Italy
E-mail: lcorsi@mat.uniroma3.it, livia.corsi@uniroma3.it

Volumi , integrali tripli e teorema di Green

Esercizio 1. Si consideri la regione rappresentata in figura.



- Dare una stima del volume della regione ottenuta ruotando la figura intorno all'asse x.
- Dare una stima del volume della regione ottenuta ruotando la figura intorno all'asse y

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali

- $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)dydx$
- $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx$

Esercizio 3. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando la regione delimitata dalle curve

$$y = 1 - x^2, \qquad y = 0$$

intorno all'asse x.

Esercizio 4. Sia R il quadrato delimitato dalle rette $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$ e $v = 1$ e si consideri la trasformazione data da $x = 2u + 3v$, $y = u - v$. Disegnare la regione in cui R viene trasformata.

Esercizio 5. L'integrale

$$\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx$$

rappresenta il volume di un solido: di quale solido si tratta?

Esercizio 6. Calcolare
$$\iiint_D 2x dV$$
dove
$$D = \{(x, y, z) \ : \ 0 \leq y \leq 2, \ 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, \ 0 \leq z \leq y\}$$

Esercizio 7. Tracciare un disegno schematico del solido il cui volume è dato da
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dydzdx$$

Esercizio 8. Determinare il volume del solido che giace tra il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Esercizio 9. Determinare la massa di una palla di raggio R e centro l'origine, la cui densità di massa è proporzionale alla distanza dall'asse z.

Esercizio 10. Nello studiare la formazione delle montagne, si stima la quantità di lavoro necessaria perché una montagna si sollevi dal livello del mare. Consideriamo una montagna a forma di un cono circolare retto. Supponiamo che la densità di massa in un punto p sia data da $g(p)$ e chiamiamo $h(p)$ l'altezza del punto p.

- Scrivere un integrale che rappresenti il lavoro necessario per la formazione della suddetta montagna.
- Il monte Fuji, in Giappone, è sostanzialmente a forma di un cono circolare retto, il cui raggio di base è $18897m$, l'altezza è $3779m$ e la densità di massa è costante e pari a $3203Kg/m^3$. Quanto lavoro è stato necessario per la formazione del monte Fuji assumendo che all'inizio la terra fosse al livello del mare?

Esercizio 11. Calcolare
$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV$$
dove B è la palla di centro l'origine e raggio 5.

Esercizio 12. Calcolare
$$\iiint_E dV$$
dove E è il solido racchiuso dall'ellissoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Sappiamo che la Terra non è una sfera perfetta, ma che a causa della rotazione i poli sono un po' schiacciati, quindi la forma della Terra è approssimativamente quella di un'ellissoide con $a = b = 6378Km$ e $c = 6356Km$. Dare una stima del volume della Terra.

Esercizio 13. Calcolare l'integrale

$$\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos(y^2))dy$$

dove C è il bordo della regione racchiusa tra la parabole $y = x^2$ e $x = y^2$, sia direttamente sia usando il teorema di Green

Esercizio 14. Una particella parte dal punto $(-2, 0)$ e si muove lungo l'asse x fino al punto $(2, 0)$, poi torna indietro lungo il semicerchio $y = \sqrt{4 - x^2}$. Usare il teorema di Green per calcolare il lavoro compiuto dalla particella se su di essa agisce la forza $F(x, y) = (x, x^3 + 3xy^2)$

Esercizio 15. Calcolare

$$\int_C F \cdot dr$$

dove $F = F(x, y) = (y - \ln(x^2 + y^2), 2 \arctan(y/x))$ e C è il cerchio $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ orientato in senso orario.