# Esercizi - settimana 5

**Livia Corsi**

Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre, Roma, I-00146, Italy
E-mail: lcorsi@mat.uniroma3.it, livia.corsi@uniroma3.it

## Equazioni Differenziali Ordinarie

**Esercizio 1.** Quali delle seguenti funzioni risolvono l'equazione differenziale $y'' + y = \sin(x)$?

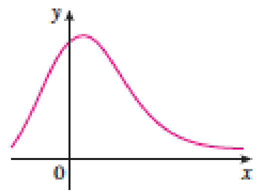
1. $y = \sin(x)$
2. $y = \frac{1}{2} x \sin(x)$
3. $y = \cos(x)$
4. $y = -\frac{1}{2} \cos(x)$

**Esercizio 2.** Si consideri l'equazione

$$y' = -y^2$$

- Cosa si può dire delle soluzioni semplicemente guardando l'equazione (quindi senza risolvere)?
- Verificare che tutte le funzioni della forma $y = 1/(x + c)$ risolvono l'equazione, indipendentemente dal valore della costante $c$.
- Esiste una soluzione dell'equazione che non sia della forma al punto precedente?
- Determinare la soluzione tale che $y(0) = 1/2$.

**Esercizio 3.** Si consideri la funzione $y = y(x)$ il cui grafico è tracciato in figura.

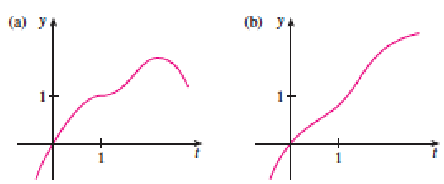



La funzione $y(x)$ risolve una (e una sola) tra le equazioni differenziali elencate sotto: determinare quale potrebbe essere l'equazione differenziale corretta senza risolverla.

1. $y' = 1 + xy$
2. $y' = -2xy$
3. $y' = 1 - 2xy$

**Esercizio 4.** Spiegare perché nessuna delle funzioni rappresentate sotto può risolvere l'equazione differenziale

$$y' = e^t (y-1)^2$$




**Esercizio 5.** Risolvere le seguenti equazioni differenziali

- $(x^2 + 1)y' = xy$
- $y' = y^2 \sin(x)$
- $u' = 2 + 2u + t + tu$
- $xy' + y = y^2, \qquad y(1) = -1$
- $P' = \sqrt{tP}, \qquad P(1) = 2$
- $L' = kL^2 \ln(t) \qquad L(1) = -1$

**Esercizio 6.** L'aria in una stanza di volume $180m^3$ in un dato istante contiene lo $0,15\%$ di diossido di carbonio. Aria fresca, con solo lo $0,05\%$ di diossido di carbonio entra nella stanza a un tasso di $2m^3/\text{min}$, e l'aria mescolata fuoriesce dalla stanza allo stessa velocità. Determinare la percentuale di diossido di carbonio in funzione del tempo. Cosa succede col passare del tempo?

**Esercizio 7.** Una sfera di raggio $1m$ ha temperatura $15°C$. La sfera si trova dentro una seconda sfera concentrica di raggio $2m$ e temperatura $25°C$. La temperatura $T(r)$ a distanza $r$ dal centro comune tra le due sfere soddisfa

$$T'' + \frac{2}{r}T' = 0.$$

Definendo $S = T'$, allora $S$ soddisfa una equazione differenziale del primo ordine: risolvere l'equazione per $S$ e usare tale risultato per ottenere un'espressione per $T(r)$.

**Esercizio 8.** In era Covid-19, la popolazione può essere divisa in due gruppi: gli infetti e i suscettibili. Se $I$ è la proporzione degli infetti e $S$ è la proporzione dei suscettibili, allora $I + S = 1$. Come ben noto, il Covid-19 si trasmette attraverso il contatto tra infetti e suscettibili, e il tasso di trasmissione è proporzionale al numero di contatti: se assumiamo che le persone possano muoversi liberamente, il numero di contatti tra i due gruppi è proporzionale al prodotto $IS$. Scrivere un'equazione differenziale che descriva l'evoluzione della trasmissione del Covid-19 nel tempo. Dimostrare che, sotto le ipotesi fatte, prima o poi tutti si ammaleranno.

**Esercizio 9.** Sia $y(t)$ la soluzione di

$$\begin{cases} y' = ay - y^3, \qquad a > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare

$$\lim_{t \to +\infty} y(t)$$

senza risolvere l'equazione

*(Suggerimento: in che modo il segno della velocità dipende da $a$?)*

**Esercizio 10.** Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali

- $x'' + 7x' + 10x = 0$
- $9x'' + 6x' + x = 0$
- $x'' - x' - 6x = 0$
- $4x'' + 12x' + 9x = 0$