Esercizi - settimana 5

Livia Corsi

Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre, Roma, I-00146, Italy
E-mail: lcorsi@mat.uniroma3.it, livia.corsi@uniroma3.it

Integrali curvilinei

Esercizio 1. Abbinare l'equazione parametrica con i grafici in figura, spiegando le ragioni della scelta.

1. $(t^4 - t + 1, t^2)$

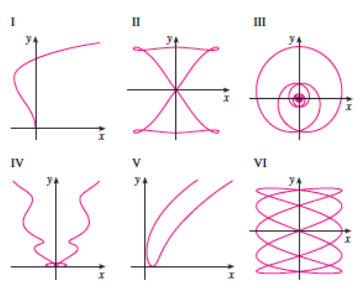
2. $(t^2 - 2t, \sqrt{t})$

3. $(\sin(2t), \sin(t + \sin(2t)))$

4. $(\cos(5t), \sin(2t))$

5. $(t + \sin(4t), t^2 + \cos(3t))$

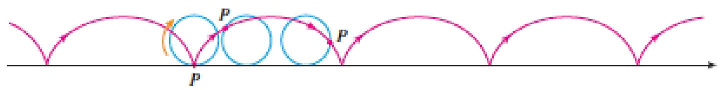
6. $(\frac{\sin(2t)}{4+t^2}, \frac{\cos(2t)}{(4+t^4)})$



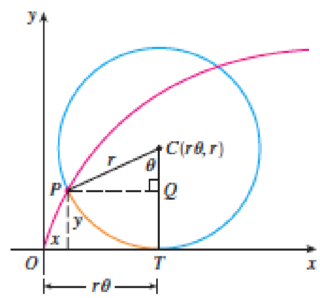
Esercizio 2. Calcolare la lunghezza delle seguenti curve (senza disegnarle).

1. $(2t, t^2, \frac{1}{3}t^3)$ con $0 \leq t \leq 1$
2. $(\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ con $0 \leq t \leq 1$
3. $(12t, 8t^{3/2}, 3t^2)$, con $0 \leq t \leq 1$
4. $(\cos(t), \sin(t), \ln(\cos(t)))$, con $0 \leq t \leq \pi/4$

Esercizio 3. La curva tracciata da un punto P sul bordo di un disco che rotoli senza strisciare lungo una retta si chiama *cicloide* ed è tracciata in figura.



Se il disco ha raggio r e il punto passa per l'origine, determinare l'equazione parametrica per la curva. *(Suggerimento: usare la figura qui sotto)*



Esercizio 4. Mostrare che la curva parametrica

$$(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

descrive il segmento che unisce i punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

Esercizio 5. Determinare la parametrizzazione del cammino di una particella che si muova lungo il cerchio $x^2 + (y-1)^2 = 4$ nei tre modi descritti sotto

- Un giro in senso orario partendo dal punto $(2, 1)$
- Tre giri in senso antiorario partendo dal punto $(2, 1)$
- Mezzo giro in senso antiorario partendo dal punto $(0, 3)$

Esercizio 6. Calcolare i seguenti intergrali

- $\int_C y^3 ds$ dove $C = (t^3, t)$ con $0 \leq t \leq 2$
- $\int_C x \sin(y) ds$ dove C è il segmento da $(0, 3)$ a $(4, 6)$
- $\int_C xyzds$ dove $C = (2\sin(t), t, -2\cos(t))$ con $0 \leq t \leq \pi$
- $\int_C xyz^2$ dove C è il segmento da $(-1, 5, 0)$ a $(1, 6, 4)$

Esercizio 7. Calcolare $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ nei seguenti casi

- $\vec{F} = (xy, 3y^2)$ e $\vec{r}(t) = (11t^4, t^3)$ con $0 \leq t \leq 1$
- $\vec{F} = (z, y, -x)$ e $\vec{r}(t) = (t, \sin(t), \cos(t))$ con $0 \leq t \leq \pi$
- $\vec{F} = (\sin(x), \cos(x), xz)$ e $\vec{r}(t) = (t^3, -t^2, t)$ con $0 \leq t \leq 1$

Esercizio 8. Determinare la massa e il centro di massa di un filo a forma elicoidale $(t, \cos(t), \sin(t))$, per $0 \leq t \leq 2\pi$ se la densità di massa in ogni punto è uguale al quadrato della distanza dall'origine.

Esercizio 9. Un recinto a forma circolare ha raggio $10m$. Si consideri un sistema di assi cartesiani la cui origine si trovi al centro del recinto. L'altezza del recinto è data dalla funzione $h(x, y) = 4 + 0,001(x^2 - y^2)$. Assumendo che $1L$ di vernice copra $100m^2$, quanta vernice serve per dipingere entrambi i lati del recinto?

Esercizio 10. Una persona di $80Kg$ deve portare un carico di $20Kg$ su una scala a forma elicoidale, che circonda un pilone di raggio $1m$ e altezza $5m$. Se per andare in cima la persona compie esattamente tre giri intorno al pilone, quanto lavoro compie? Si ricordi che qui agisce la forza di gravità.

Esercizio 11. In ciascuno dei casi sotto, determinare una funzione V tale che $F = \nabla V$ ed utilizzarla per calcolare $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

- $F = (xy^2, xy^2)$ e $C = (t + \sin(\frac{\pi t}{2}), t + \cos(\frac{\pi t}{2}))$ con $0 \leq t \leq 1$
- $F = (\frac{y^2}{1+x^2}, 2y \arctan(x))$ e $C = (t^2, 2t)$ con $0 \leq t \leq 1$
- $F = (e^y, xe^y, (z + 1)e^z)$ e $C = (t, t^2, t^3)$ con $0 \leq t \leq 1$