Esercizi - settimana 4

Livia Corsi

Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre, Roma, I-00146, Italy
E-mail: lcorsi@mat.uniroma3.it, livia.corsi@uniroma3.it

Integrali di funzioni razionali, integrali impropri e lunghezza di curve

Esercizio 1. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni

1. $$f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$$

2. $$f(r) = \frac{r^2}{r + 4}$$

3. $$f(u) = \frac{e^{2u}}{e^{2u} + 3e^u + 2}$$

4. $$f(x) = \frac{x^3 - 4x - 10}{x^2 - x - 6}$$

5. $$f(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta) + \sin(\theta)}$$

6. $$f(t) = \frac{t + 4}{t^2 + 2t + 5}$$

Esercizio 2. Determinare i valori di p per cui il seguente integrale converge senza calcolare l'integrale.

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^p} dx$$

Esercizio 3. Il matematico tedesco Karl Weierstrass (1815-1897) notò che la sostituzione $y = \tan(x/2)$ permette di convertire qualsiasi funzione razionale di $\sin(x)$ e $\cos(x)$ in una funzione razionale di y.

- Ponendo $y = \tan(x/2)$ mostrare che

$$\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \qquad \sin(\frac{x}{2}) = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$$

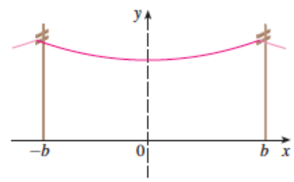
- Usare il punto precedente per mostrare che

$$\cos(x) = \frac{1 - y^2}{1 + y^2} \qquad \sin(x) = \frac{2y}{1 + y^2}, \qquad dx = \frac{2}{1 + y^2} dy$$

- Usare la sostituzione ai punti precedenti per calcolare la primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin(x) - \cos(x)}$$

Esercizio 4. La figura mostra un cavo elettrico sospeso tra due pali. Il cavo ha la forma di una *catenaria* ossia di una curva di equazione $y = c + a\cosh(\frac{x}{a})$

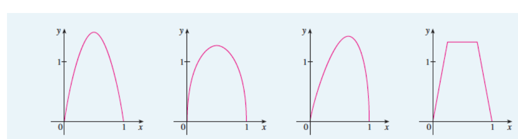


- Determinare la lunghezza del cavo in funzione dei parametri a, b, c.
- Supponiamo che la distanza tra i pali sia di $100m$, e che la lunghezza del cavo tra i pali sia di $102m$. Se il punto piu' in basso del cavo deve essere a $40m$ d'altezza da terra, quanto devono essere alti i pali?

Esercizio 5. Le curve mostrate in figura sono tutte esempi di grafici di funzioni continue f aventi le seguenti proprietà.

- $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$
- $f(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1$
- $\int_0^1 f(x)dx = 1$

Le lunghezze delle curve però sono diverse fra loro.

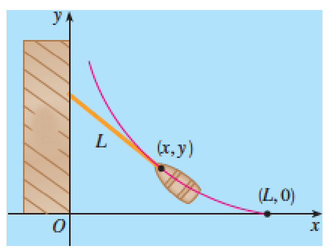


Trovare due funzioni che soddisfino le proprietà sopra e tracciarne il grafico (che potrebbe essere simile a quelli sopra o completamente diverso). Calcolare quindi la lunghezza delle due curve e dire quale delle due è più corta.

Esercizio 6. Calcolare i seguenti integrali o mostrare che sono divergenti

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^3} dx$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^4} dx$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)} dx$
- $\int_2^{6} \frac{y}{\sqrt{y-2}} dx$
- $\int_0^{4} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_0^{1} \frac{1}{2-3x} dx$
- $\int_0^{1} \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-2x} dx$

Esercizio 7. Un uomo che all'inizio si trova nel punto O, cammina lungo un molo tirando una barca tramite una cima di lunghezza L. L'uomo mantiene la cima dritta e tesa, cosicché la curva seguita dalla barca è una *trattrice* e la cima è sempre tangente alla curva (si veda la figura).



- Mostrare che se la curva seguita dalla barca è il grafico di una funzione $f(x)$, allora

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$$

- Determinare la funzione $f(x)$.

Esercizio 8. Il Gateway Arch a St. Luis in foto è stato costruito usando l'equazione

$$y = 211,49 - 20,96 \cosh(0,03291765x)$$

per la curva centrale dell'arco, dove x, y sono misurati in metri e $|x| \leq 91,2$.

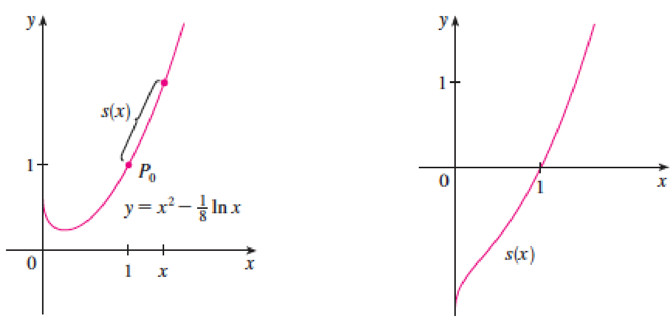
Impostare un integrale per calcolare la lunghezza dell'arco, e usare sei segmenti (e una calcolatrice) per stimarne la lunghezza

Esercizio 9. Disegnare la curva di equazione $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ e usare la sua simmetria per determinarne la lunghezza.

Esercizio 10. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln(x)$ e sia

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt$$

la sua *lunghezza d'arco* ovvero la funzione che misura la lunghezza del grafico di f tra il punto 0 e il punto x.



- Calcolare $s(x)$.
- Perché $s(x) \leq 0$ per $x \leq 1$?