Esercizi - settimana 3

Livia Corsi

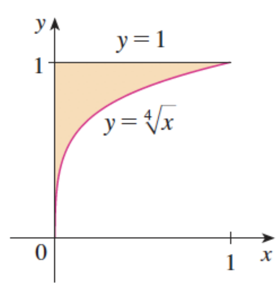
Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre, Roma, I-00146, Italy
E-mail: lcorsi@mat.uniroma3.it, livia.corsi@uniroma3.it

Tecniche di integrazione

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali

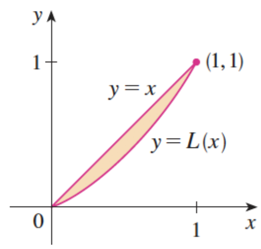
1. $$\int_{-1}^{0} (2x - e^x) dx$$
2. $$\int_{1}^{4} \sqrt{t}(1 + t) dt$$
3. $$\int_{1}^{9} \frac{3x - 2}{\sqrt{x}} dx$$
4. $$\int_{0}^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} d\theta$$

Esercizio 2. Determinare l'area della regione in figura.



Esercizio 3. Gli economisti usano una distribuzione cumulativa, detta *curva di Lorenz* per descrivere la distribuzione del reddito in una nazione. La curva di Lorenz è una funzione $L(x)$ definita su $[0, 1]$, con estremi in $(0, 0)$ e $(1, 1)$, ed è continua e convessa. I punti su questa curva sono determinati classificando tutte le famiglie a seconda del loro reddito, e poi calcolando la percentuale delle famiglie il cui reddito è minore o uguale di una certa percentuale del reddito totale della nazione. Ad esempio, il punto $(a/100, b/100)$ si

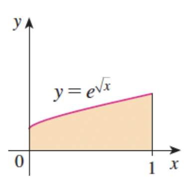
trova sulla curva di Lorenz se l'$a\%$ più basso della scala dei redditi riceve al più il $b\%$ del reddito totale. Perciò l'*equità assoluta* della distribuzione del reddito si ha quando l'$a\%$ più basso della scala dei redditi riceve esattamente il $a\%$ del reddito totale, nel qual caso la curva sarebbe la retta $y = x$. L'area tra la curva di Lorenz e la retta $y = x$ misura quanto la distribuzione dei redditi differisce dall'equità assoluta. Il *coefficiente di ineguaglianza* è il rapporto tra l'area compresa tra la curva di Lorenz e la retta $y = x$, e l'area sotto la retta $y = x$

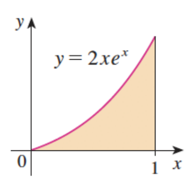


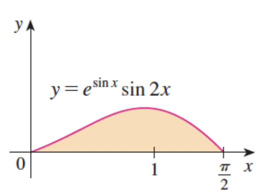
- Mostrare che il coefficiente di ineguaglianza è uguale al doppio dell'area tra la curva di Lorenz e la retta $y = x$, ovvero
$$\textit{coefficiente di ineguaglianza} = 2\int_0^1 (x - L(x))dx$$
- Supponiamo che la distribuzione di reddito di una certa nazione sia data dalla curva di Lorenz $L(x) = \frac{5}{12}x^2 + \frac{7}{12}x$. Qual'è la percentuale di reddito ricevuta dal 50% più basso della scala dei redditi?, quale il coefficiente di ineguaglianza?

Esercizio 4. Una corda di lunghezza $4m$ e spessore trascurabile ha densità di massa $\rho(x) = (9+2\sqrt{x})Kg/m$. Quanto pesa la corda?

Esercizio 5. Quali delle seguenti aree sono uguali?, e perché?







Esercizio 6. Calcolare i seguenti integrali

- $\int_0^{13} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}} dx$
- $\int_1^e \frac{\sin(\log(x))}{x} dx$
- $\int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T - \alpha) dt$
- $\int_1^5 x^2 \log(x) dx$
- $\int_{-3}^6 xe^{-x} dx$
- $\int_{-2}^2 e^{2\theta} \sin(3\theta) d\theta$
- $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin(2x) dx$
- $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} dx$
- $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$
- $\int_{-1}^4 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx$
- $\int_0^3 \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} dx$

Esercizio 7. Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+b}^{b+c} f(x)dx.$$

In particolare, nel caso $f(x) \geq 0$ tracciare un disegno schematico per interpretare l'equazione sopra geometricamente come uguaglianza tra aree.

Esercizio 8. Un secchio che pesa $4kg$ e una corda di che pesa $1kg$ sono usati per tirare su della sabbia da un pozzo profondo $50m$. Il secchio si riempie con $40kg$ di sabbia ed è tirato su a $1m/s$. Purtroppo nel secchio è presente un buco dal quale fuoriesce la sabbia a una velocità di $2g/s$. Quale è il lavoro necessario per tirare su il secchio?

Esercizio 9. La temperatura a Roma a metà marzo si può modellare attraverso la funzione

$$T(t) = 6 + 9\sin(\frac{\pi t}{24})$$

dove t è il tempo misurato in ore. Determinare la temperatura media dalle 9:00 alle 21:00.

Esercizio 10. Una particella si muove lungo una linea retta con velocità $v(t) = t^2 e^{-t}\ m/s$. Quanto lontano è arrivata dopo $7s$?

Esercizio 11. Calcolare la primitiva di $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ usando i seguenti quattro metodi

- Sostituendo $y = \cos(x)$
- Sostituendo $y = \sin(x)$
- Usando l'identità $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- Integrando per parti

Spiegare perché i risultati ottenuti sopra sembrano diversi (ma non lo sono!).

Esercizio 12. Determinare l'area della regione delimitata dalle curve $f(x) = \sin^2(x)$ e $g(x) = \cos^2(x)$ per $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$

Esercizio 13. Dimostrare la formula $A = \frac{1}{2}R^2\pi^2$ per l'area del settore circolare di raggio R e ampiezza θ.