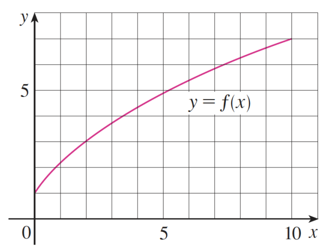
Esercizi - settimana 1

Livia Corsi

Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre, Roma, I-00146, Italy
E-mail: lcorsi@mat.uniroma3.it, livia.corsi@uniroma3.it

1 Somme di rettangoli e Teorema Fondamentale del Calcolo

Esercizio 1.1. Si consideri la funzione f il cui grafico è rappresentato in figura. Usare cinque rettangoli



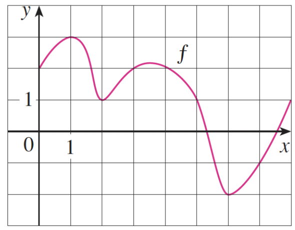
per trovare una stima dal basso e una dall'altro per l'area tra $x = 0$ e $x = 10$. In entrambi i casi tracciare un disegno schematico dei rettangoli usati. Fare altrettanto, ma con dieci rettangoli

Esercizio 1.2. Dare una stima dell'area sotto il grafico di $f(x) = \sqrt{x}$ tra $x = 0$ e $x = 4$ usando quattro rettangoli e scegliendo le altezze come i punti a destra. Tracciare un disegno schematico: la stima ottenuta è una stima dall'alto o dal basso?, e se invece si fossero usati i punti a sinistra?

Esercizio 1.3. Determinare una regione la cui area è uguale ai seguenti limiti (senza calcolare i limiti)

1. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10}$$
2. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \tan(\frac{i\pi}{4n})$$
3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos(2 + \frac{3i}{n})$$

Esercizio 1.4. Il grafico di una funzione f è dato in figura.



Dare una stima di $\int_0^8 f(x)dx$ usando quattro sottointervalli e altezza

- i punti a destra
- i punti a sinistra
- i punti di mezzo

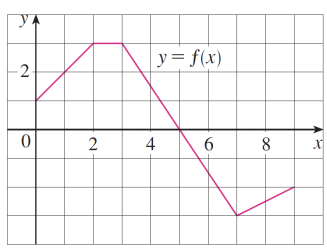
Esercizio 1.5. Determinare un'approssimazione dell'integrale

$$\int_{-1}^{2}(1+x^2)dx$$

- usando otto rettangoli con altezza sui punti a destra
- usando otto rettangoli con altezza sui punti a sinistra
- usando otto rettangoli con altezza sui punti di mezzo

Tracciare un disegno schematico e usarlo per confrontare i risultati ottenuti. Quale sembra essere l'approssimazione migliore?

Esercizio 1.6. Il grafico di una funzione f è dato in figura.



Calcolare ciascuno dei seguenti integrali usando la definizione di area con segno

- $\int_0^2 f(x)dx$
- $\int_5^7 f(x)dx$
- $\int_0^5 f(x)dx$
- $\int_0^9 f(x)dx$

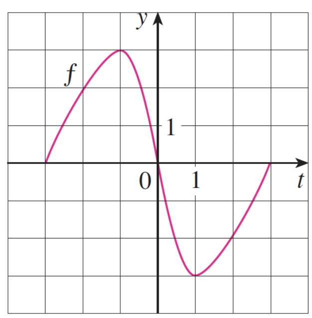
Esercizio 1.7. Assumendo che

$$\int_0^1 3x\sqrt{x^2+4}dx = 5\sqrt{5}-8$$

calcolare

$$\int_1^0 3u\sqrt{u^2+4}du$$

Esercizio 1.8. Sia $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)dt$ dove f è la funzione il cui grafico è dato in figura.



- Calcolare $g(-3)$ e $g(3)$
- Dare una stima di $g(-2)$, $g(-1)$ e $g(0)$
- Su quale intervallo g è crescente?
- Per quale valore g è massima?

Esercizio 1.9. Calcolare i seguenti integrali usando il Teorema Fondamentale del Calcolo

- $\int_{-1}^{2}(x^3-2x)dx$
- $\int_0^1(1+\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{5}u^9)du$
- $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$

- $\int_{-1}^{1} e^{x+1}dx$
- $\int_0^{\pi} f(x)dx$ dove

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 \leq x < \pi/2 \\ \cos(x) & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Esercizio 1.10. Trovare l'errore

$$\int_{-2}^{1} x^{-4}dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$$

(perché *deve* esserci un errore? tracciare un disegno schematico)

Esercizio 1.11. Dare una stima di

$$S = \sqrt{\frac{1}{1000}}\left(\sqrt{\frac{2}{1000}} + \sqrt{\frac{3}{1000}} + \sqrt{\frac{4}{1000}} + \ldots + \sqrt{\frac{999}{1000}} + 1\right)$$

(Sugg. Se le somme approssimano gli integrali, è vero anche che gli integrali approssimano le somme)

Esercizio 1.12. Determinare una funzione f e un numero a tali che

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}$$