Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2022/2023

FM310 - Istituzioni di Fisica Matematica

Secondo appello (6-2-2023)

(due pagine)

Esercizio 1. Sia dato un operatore L che soddisfa le seguenti relazioni

$$LL^\dagger + L^\dagger L = \mathbb{1} \qquad\qquad L^2 = (L^\dagger)^2 = 0$$

(1.1) Può l'operatore essere hermitiano?
(1.2) Dimostrare che i soli possibili autovalori per l'operatore $M = L^\dagger L$ sono 0 e 1.

Esercizio 2. Scrivere la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u, \\ u(x,0) = f(x), \\ \partial_t u(x,0) = g(x) & \qquad x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = 0 \\ \alpha\partial_x u(x,t) - u(x,t) = 0 \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere in particolare cosa cambia se $\alpha > \pi$ o $\alpha \leq \pi$.

Esercizio 3. Determinare la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t u + (x^2-1)\partial_x u = 0, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Esercizio 4. Un oscillatore armonico lineare di massa m e frequenza ω si trova al tempo $t = 0$ in uno stato tale che

- misurando l'osservabile $aa^\dagger$ si trovano solo i valori 1 e 3;
- il valor medio di $a^\dagger a$ è $1/2$ e quello di $aa + a^\dagger a^\dagger$ è zero.

(4.1) Determinare lo stato più generale che obbedisce a queste condizioni.
(4.2) Calcolare il valor medio dell'energia potenziale in funzione del tempo.

<u>ESERCIZIO 5.</u> Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in classe di Schwartz, sia $u(x,t)$ soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n. \\ \partial_t u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

e siano

$$K(u(\cdot,t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t u(x,t)|^2 dx \qquad V(u(\cdot,t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 dx.$$

Mostrare che

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T K(u(\cdot,t))dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T V(u(\cdot,t))dt$$

Sugg. Può essere utile ricordare che per funzioni in classe di Schwartz vale l'identità di Plancherel $\|f\|_{L^2}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2}^2$ *dove* $\hat{f}$ *è la trasformata di Fourier di* f*.*

<u>ESERCIZIO 6.</u> Sia $H(x,t)$ il nucleo del calore. Calcolare $m_{2k}(H(\cdot,t))$ per ogni $k \geq 1$.
Sugg. Può essere utile calcolare le derivate k*-esime della funzione*

$$G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2/2} dx.$$

Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche.
Non è necessario (ma è comunque apprezzato) calcolare gli integrali esplicitamente.