Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2021/2022

FM310 - Istituzioni di Fisica Matematica

Primo appello (17-1-2021)

(due pagine)

Esercizio 1. Una particella quantistica di massa m si muove in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & x > 0 \end{cases}$$

Determinare gli stati legati.

Esercizio 2. Scrivere la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u, \\ u(x,0) = f(x), \\ \partial_t u(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad , \qquad g(x) = 0$$

Determinare i punti di discontinuità della soluzione per $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Cosa succede se si scambiano i ruoli dei dati iniziali f e g.

Esercizio 3. Determinare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t u - x \partial_x u = 0,$$

con dato iniziale $u(0,x) = \cos(x)$

Esercizio 4. Determinare la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2} \partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Quale è il comportamento asintotico della soluzione nel limite $t \mapsto +\infty$? Da quali proprietà del dato iniziale dipende tale comportamento?

<u>Esercizio 5.</u> Una particella quantistica si muove nello spazio tridimensionale, sotto l'azione dell'Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}|P|^2 + V(Q)$$

dimostrare che

$$P_j = -i\frac{m}{\hbar}[Q_j, H], \qquad j = 1, 2, 3$$

e usare tale relazione per dimostrare che in uno stato stazionario $|\psi_E\rangle$ si ha

$$\langle \psi_E | P | \psi_E \rangle$$

<u>Esercizio 6.</u> Sia $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ consideri l'equazione

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = f(x_1, x_2) \\ \partial_t u(x, 0) = g(x_1, x_2) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

Mostrare che la soluzione non dipende da x_3. Descrivere la natura di tale soluzione nel caso in cui

$$\mathrm{supp}(f), \mathrm{supp}(g) \subseteq B_R(0) := \{x_1^2 + x_2^2 < R\},$$

commentando in particolare sul principio di Huygens.

<u>Esercizio 7.</u> Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e si consideri la soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2}\Delta u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostrare che

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^n} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

uniformemente in x.

Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche.
Non è necessario (ma è comunque apprezzato) calcolare gli integrali esplicitamente.