Corso di Laurea in Fisica - Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2019/2020

FM210 - Meccanica Analitica

Appello zero (10-06-2020)

(due pagine)

Esercizio 1. Sia dato un sistema meccanico costituito da un punto P_1 di massa m vincolato ad un piano orizzontale π prefissato, e da un secondo punto P_2 di massa M vincolato a scorrere su una retta verticale r assegnata. Un filo inestensibile, passante per il punto di intersezione O tra il piano π e la retta r, collega tra loro i due punti. Sul sistema agisce la gravità.

(1.1) Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, usando coordinate polari (ρ, θ) per P_1 dove ρ è la distanza di P_1 da O e θ è l'angolo formato dalla congiungente tra P_1 e O e una retta a piacere su π.
(1.2) Ridurre il problema a un solo grado di libertà per la coordinata ρ scrivendo la Lagrangiana per un valore assegnato p_θ del momento della quantità di moto.
(1.3) Per $p_\theta > 0$ fissato si traccino il grafico del potenziale e il piano delle fasi del sistema ridotto; si verifichi che per ogni valore di energia il raggio ρ oscilla tra due valori limitati.
(1.4) Si determinino i dati iniziali ρ_0, $\dot{\rho}_0$, θ_0, $\dot{\theta}_0$ in corrispondenza dei quali il moto di P_1 è circolare, e si calcoli il periodo del moto.

Esercizio 2. Si consideri la trasformazione di coordinate

$$P = ap^\alpha \cos^\beta(q)$$
$$Q = bp^\alpha \sin^\gamma(q)$$

(2.1) Per quali scelte di $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ la trasformazione è simplettica?
(2.2) In corrispondenza dei valori al punto 1, scrivere una funzione generatrice di seconda specie della trasformazione.
(2.3) Sempre in corrispondenza dei valori al punto 1, determinare la trasformazione inversa e scriverne una generatrice.
(2.4) Risolvere le equazioni del moto per l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = 2p\cos(q)\sin(q) + \sqrt{p}\sin(q)$$

Esercizio 3. Sia

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$
$$(q,p) \longmapsto (Q,P)$$

una trasformazione di coordinate. E' possibile che Φ sia simplettica e che $Q = Q(q_2, p_2)$, i.e. le coordinate Q non dipendono dalla coppia (q_1, p_1)? Giustificare attentamente la risposta.

Esercizio 4. Si consideri una semiretta r imperniata in un punto O e libera di ruotare in un piano verticale intorno ad O. Sia P un punto di massa m fissato su r a distanza ℓ da O. Assumiamo che P sia collegato tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla ad un punto fisso Q che si trovi sulla verticale di O, al di sopra di esso a distanza a da O. Si trovi per quali valori della massa m ogni posizione è di equilibrio.

<u>Esercizio 5.</u> Si consideri il sistema rigido costituito da 5 punti di massa m disposti in corrispondenza dei vertici di una piramide equilatera di lato ℓ a base quadrata.
(5.1) Determinare il centro di massa del sistema.
(5.2) Determinare gli assi d'inerzia rispetto al centro di massa.
(5.3) Calcolare i corrispondenti momenti principali d'inerzia.

<u>Esercizio 6.</u> Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = 0 \\ \dot{q}_1 = p_1 + p_2 \\ \dot{q}_2 = \alpha p_1 - 2p_2 - \beta q_2^4 \end{cases}$$

(6.1) Determinare i valori di α, β tali che il sistema è Hamiltoniano e determinare l'Hamiltoniana.
(6.2) Scrivere la Lagrangiana corrispondente.
(6.3) Determinare (se esiste) una funzione $f = f(p_1, p_2)$ tale che la funzione

$$G(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = q_1 + tf(p_1, p_2)$$

è una costante del moto.

<u>Esercizio 7.</u> Si consideri un sistema meccanico conservativo con potenziale $V \in C^2$ in un sistema di coordinate inerziale $Oxyz$. Sia $O'\xi\eta\zeta$ un sistema relativo che si muove di moto puramente rotatorio secondo l'equazione

$$q = B(t)Q, \qquad B(t) := \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(7.1) Si scriva il sollevamento della trasformazione $S : (q, \dot{q}) \mapsto (Q, \dot{Q})$
(7.2) Si scriva la corrispondente trasformazione nello spazio coniugato $S^* : (q, p) \mapsto (Q, P)$
(7.3) Si dimostri la canonicità della trasformazione S^*, determinandone una funzione generatrice.
(7.4) Si applichi la trasformazione S^* al moto di una particella soggetta a forze centrali ($V = V(\sqrt{x^2 + y^2})$) e si scriva la Hamiltoniana nel nuovo sistema di coordinate.
(7.5) Si discuta la conservazione di tale Hamiltoniana.

<u>Esercizio 8.</u> Si consideri un sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto di massa m soggetto a una forza di potenziale $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$, $V'(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$, e

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = +\infty.$$

(8.1) Scrivere la Lagrangiana e la corrispondente Hamiltoniana.
(8.2) Si consideri la generatrice

$$F(q, P) = \int_0^q \sqrt{2m(P - V(u))}du.$$

Determinare la trasformazione di coordinate corrispondente.
(8.3) Scrivere l'Hamiltoniana nelle nuove variabili e risolvere le corrispondenti equazioni del moto.
(8.4) A cosa servono le ipotesi sul potenziale?

È consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche. È inoltre consentito, risolvere gli esercizi in collaborazione con altri studenti del corso. Qualora voleste lavorare in gruppo, inviate un solo file a nome del gruppo, riportante i nomi e numeri di matricola dei partecipanti.