Corso di Laurea in Fisica - Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2019/2020

FM210 - Meccanica Analitica

Appello uno (25-06-2020)

(due pagine)

Esercizio 1. Sia dato un sistema meccanico costituito da un pendolo semplice di massa m_1, il cui punto di sospensione, di massa m_2, è libero di muoversi lungo una retta orizzontale. Sul sistema agisce la gravità.

(1.1) Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(1.2) Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(1.3) Si scriva la Lagrangiana nel caso in cui il punto di sospensione del pendolo è collegato a un punto fisso O tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

Esercizio 2. Sia data la trasformazione

$$\begin{cases} Q = 2a\ln(p) + \ln(q) \\ P = -p^b q\ln(q). \end{cases}$$

(2.1) Se ne determini il dominio.
(2.2) Trovare i valori di a e b tali che la trasformazione è canonica.
(2.3) Risolvere le equazioni del moto per l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2q^2\ln^2(q)$$

con dato iniziale $(q(0), p(0)) = (e, \frac{1}{e})$.

Esercizio 3. Si consideri un sistema meccanico conservativo unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza di energia potenziale $V(x)$

(3.1) Se $V(x) = -|x|^\alpha$ con $\alpha > 0$, si consideri il moto con dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (1, 0)$. In quanto tempo il punto materiale raggiunge $+\infty$?
(3.2) In riferimento al punto precedente. Per quanto tempo il moto esiste?
(3.3) Se invece esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $V(x) \geq M$ per ogni x, dimostrare che $|x(t)| \leq c_1 + c_2t$ per c_1, c_2 costanti opportune che dipendono dal dato iniziale.
(3.4) In riferimento al punto precedente, dimostrare che in questo caso il moto esiste per tutti i tempi.

Esercizio 4. Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza ℓ è libera di ruotare in un piano orizzontale attorno al suo punto medio O. Un punto materiale P di massa m, libero di scorrere sulla retta dell'asta, è legato ad O tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

(4.1) Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(4.2) Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

Esercizio 5. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie di equazione

$$z = ae^{-\frac{x^2+y^2}{a}}, \qquad a > 0\,.$$

Oltre alle forze di reazione vincolare, il punto è soggetto alla forza peso e alla forza

$$F = -k\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k > 0\,.$$

(5.1) Si scriva la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(Suggerimento: si usino coordinate cilindriche)

(5.2) Si riconosca che il sistema ammette una variabile ciclica e si identifichino le grandezze conservate del sistema.
(5.3) Si scriva la Lagrangiana ridotta.

<u>Esercizio 6.</u> Si consideri il sistema rigido costituito da un disco di raggio r, di massa totale m e densitá di massa

$$\rho(x,y) = \frac{m}{\pi \ln(1+r^2)} \frac{1}{1+x^2+y^2} .$$

Si determinino gli assi di inerzia del sistema rispetto al centro di massa e se ne calcolino i momenti principali di inerzia.

<u>Esercizio 7.</u> Nel piano si consideri il gruppo a un parametro di diffeomorfismi

$$g_\alpha : \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} q_1+\alpha \\ q_2 \end{pmatrix}$$

(7.1) Si scriva il sollevamento della trasformazione $S : (q,\dot q) \mapsto (Q,\dot Q)$
(7.2) Si scriva la corrispondente trasformazione nello spazio coniugato $S^* : (q,p) \mapsto (Q,P)$
(7.3) Si dimostri la canonicità della trasformazione S^*.
(7.4) Calcolare la quantità conservata associata all'invarianza sotto il gruppo di trasformazioni canoniche così ottenuto

<u>Esercizio 8.</u> Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + \varepsilon(q^3 + \lambda q p^2)$$

(8.1) Si trovi una funzione generatrice della forma

$$F(q,P) = qP + \varepsilon G(q,P)$$

con $G(q,P)$ un polinomiale che trasformi H in un'Hamiltoniana della forma

$$K(Q,P) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2 + \varepsilon^2 V(Q,P,\varepsilon)$$

con V limitata in ε.
(8.2) Si utilizzi la trasformazione al punto precedente per scrivere la soluzione generale delle equazioni del moto a meno ti termini di ordine ε^2

È consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche. È inoltre consentito, risolvere gli esercizi in collaborazione con altri studenti del corso. Qualora voleste lavorare in gruppo, inviate un solo file a nome del gruppo, riportante i nomi e numeri di matricola dei partecipanti.