

Corso di Laurea in Fisica - Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2019/2020
FM210 - Meccanica Analitica

APPELLO LAUREANDI (23-11-2020)

(DUE PAGINE)

ESERCIZIO 1. In un piano verticale si consideri un anello di massa M , raggio R e spessore trascurabile libero di ruotare attorno al suo asse centrale ortogonale, fisso e orizzontale. Un pendolo di lunghezza l e massa $m < M$ è sospeso a un punto A dell'anello; un punto materiale di massa M è invece fissato al punto B dell'anello diametralmente opposto ad A . Sul sistema agisce la gravità.

- (1.1) Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange,.
- (1.2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

ESERCIZIO 2. Si consideri la trasformazione di coordinate lineare

$$\begin{cases} Q = Aq \\ P = Bp \end{cases}$$

con A, B matrici $n \times n$ invertibili. Dimostrare che la trasformazione è canonica se e solo se $B^T = A^{-1}$.

ESERCIZIO 3. Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi su una sfera.

- (3.1) Determinarne il momento p e il momento angolare L .
- (3.2) Assumendo che la particella sia soggetta a una forza conservativa di energia potenziale $V(q)$ dove q è la posizione della particella, scrivere la Lagrangiana e la corrispondente Hamiltoniana.
- (3.2) Nel caso $V(q) \equiv 0$, dire se esistono componenti di p e L conservate.
- (3.3) Sia $f = f(q, p)$ una funzione a simmetria sferica nelle q . Mostrare che $\{f, L_3\} = 0$ dove L_3 è la componente verticale del momento angolare della particella.
- (3.4) Usare il punto precedente per dimostrare che L_3 è una quantità conservata se $V(q)$ ammette simmetria sferica.

ESERCIZIO 4. Possiamo schematizzare il sistema solare come un sistema di $n + 1$ punti materiali, di cui n aventi massa m_i (i pianeti) e uno massa $M > m_i$ (il sole), tale che ciascun punto è soggetto a una forza di energia potenziale $V = V(|r_i - r_j|)$ se r_j è il vettore che identifica il punto j -esimo.

- (4.1) Si scriva l'energia meccanica del sistema.
- (4.2) Verificare che sul centro di massa non agiscono forze e usare questo fatto per ridurre i gradi di libertà del problema.
(Per credito parziale si può considerare il caso $n = 3$.)

Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche. Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.