Corso di Laurea in Fisica - Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2019/2020

FM210 - Meccanica Analitica

Appello uno (16-07-2020)

(due pagine)

Esercizio 1. Sia dato un sistema meccanico costituito da due punti materiali P e Q entrambi di massa m vincolati nel modo seguente. P giace in un piano verticale π e mantiene distanza ℓ da un punto fisso O. Q è vincolato a muoversi sulla retta orizzontale in π passante per O, mantenendo distanza ℓ da P. Il piano π ruota intorno alla verticale passante per O con velocità angolare costante Ω.

(1.1) In un sistema di riferimento solidale con π, si scrivano la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(1.2) Si trovino le configurazioni di equilibrio del sistema al punto precendente e se ne discuta la stabilità.
(1.3) Si scrivano la Lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange in un sistema di riferimento inerziale.

Esercizio 2. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p,t) = -\frac{qp}{2t}\ln\left(\frac{p}{2t}\right)$$

(2.1) Se ne determini il dominio.
(2.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Hamilton.
(2.3) Risolvere le equazioni del moto utilizzando la trasformazione canonica generata da

$$F(q,Q,t) = q^2 e^{Qt}$$

Esercizio 3. Si consideri un sistema meccanico conservativo unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza di energia potenziale $V(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha > 1$. Dimostrare che il periodo del moto con energia E è proporzionale a $E^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}$.

Esercizio 4. Si consideri la Lagrangiana

$$L(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) + q_1^2 + q_2^2 - (q_1^2+q_2^2)^3$$

(4.1) Scrivere la Hamiltoniana corrispondente.
(4.2) Dimostrare che esiste una costante del moto F diversa dall'energia.
(4.3) Si consideri il sistema ristretto sui livelli $F = c$ con $c \neq 0$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema lagrangiano ad un grado di libertà e si scriva la corrispondente Lagrangiana L_c.
(4.4) Si studino le orbite al variare di c.
(4.5) Si considerino, per il sistema di L, le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \alpha q_1(0) + \beta q_2(0) &= 0 \\ \alpha \dot{q}_1(0) + \beta \dot{q}_2(0) &= 0 \end{aligned} \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0.$$

Si studino i moti corrispondenti.

Esercizio 5. Si consideri il sistema rigido costituito da un disco di raggio r, di massa totale m e densitá di massa

$$\rho(x,y) = \frac{m}{\pi\ln(1+r^2)}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,.$$

Si determinino gli assi di inerzia del sistema rispetto al centro di massa e se ne calcolino i momenti principali di inerzia.

<u>Esercizio 6.</u> Sia $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ tale che $g(q,p) = G(f(q,p))$ con $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dimostrare che allora $\{f, g\} = 0$. Più in generale dimostrare che se $g(q,p) = G(q,p,f(q,p))$ con $G : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ allora nel calcolo di $\{f,g\}$ si può ignorare la dipendenza di g da q e p attraverso f.

<u>Esercizio 7.</u> Un pendolo semplice di massa m e lunghezza ℓ è soggetto, oltre alla gravità, ad una forza elastica esercitata da una mollta di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Un estremo della molla è legato ad m mentre l'altro è libero di scorrere su una retta orizzontale posta a distanza a dal punto di sospensione del pendolo, in modo che la molla rimanga costantemente verticale.
(7.1) Si scriva la Lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(7.2) Si trovino le configurazioni di equilibrio nel caso $a = 0$ e $a = 2\ell$.

<u>Esercizio 8.</u> Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - 2\varphi_3))$$

(8.1) Scrivere le corrispondenti equazioni di Hamilton.
(8.2) Determinare se esistono valori di $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ e dei dati iniziali per cui le variabili I divergono linearmente in t.

<u>Esercizio 9.</u> Un punto materiale P di massa m è vincolato a una superficie sferica di raggio R. L'unica forza attiva agente su P è una forza elastica di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, che lega P alla sua proiezione P' sull'asse z.
(9.1) Si scriva la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange
(Sugg. Utilizzare coordinate sferiche)
(9.2) Ridurre il problema a un solo grado di libertà.
(9.3) Per il problema ridotto, determinare le configurazioni d'equilibrio e la relativa stabilità, tracciando il grafico del potenziale e il ritratto di fase.
(9.4) Per il problema non ridotto, si considerino i moti corrispondenti agli equilibri del problema ridotto, e si determini per ciascuno di essi la reazione vincolare su P.

È consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini, computer e calcolatrici grafiche. È inoltre consentito, risolvere gli esercizi in collaborazione con altri studenti del corso. Qualora voleste lavorare in gruppo, inviate un solo file a nome del gruppo, riportante i nomi e numeri di matricola dei partecipanti.