Sobolev inequalities in the limiting case and exponential integrability

Luca Battaglia

15 luglio 2011

Gli spazi di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definizione

Dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se

- $u \in L^p(\Omega)$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \in L^p(\Omega)$
- $u \equiv 0$ sul bordo di Ω

Gli spazi di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Teoremi di immersione

Una delle proprietà più importanti di questi spazi è l'immersione in altri spazi funzionali più noti:

Una delle proprietà più importanti di questi spazi è l'immersione in altri spazi funzionali più noti:

$p < N$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*] \qquad \text{con } p^* = \frac{Np}{N-p} > p$$

Gli spazi di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Teoremi di immersione

Una delle proprietà più importanti di questi spazi è l'immersione in altri spazi funzionali più noti:

$p < N$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*] \qquad \text{con } p^* = \frac{Np}{N-p} > p$$

$p > N$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \qquad \text{con } \alpha = 1 - \frac{N}{p} > 0$$

Il caso $p = N$ è dunque considerato un caso limite per l'immersione degli spazi di Sobolev.

Il caso $p = N$ è dunque considerato un caso limite per l'immersione degli spazi di Sobolev.
Poiché $p^* = +\infty$ quando $p = N$, ci si aspetterebbe di avere un'immersione in $L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [N, +\infty]$, in realtà:

Il caso $p = N$ è dunque considerato un caso limite per l'immersione degli spazi di Sobolev.
Poiché $p^* = +\infty$ quando $p = N$, ci si aspetterebbe di avere un'immersione in $L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [N, +\infty]$, in realtà:

$$W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [N, +\infty)$$

ma

$$W_0^{1,N}(\Omega) \not\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

Integrabilità esponenziale

I controesempi illimitati di $W_0^{1,N}(\Omega)$ hanno solo singolarità logaritmiche, il che lascia sospettare che valga anche una condizione di integrabilità esponenziale.

Integrabilità esponenziale

I controesempi illimitati di $W_0^{1,N}(\Omega)$ hanno solo singolarità logaritmiche, il che lascia sospettare che valga anche una condizione di integrabilità esponenziale.
Trudinger dimostra che

Disuguaglianza di Trudinger

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$$u \in W_0^{1,N}(\Omega), \int_\Omega |\nabla u|^N \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}} \leq C$$

per qualche $\alpha > 0$

Integrabilità esponenziale

Successivamente, Moser rifinisce il risultato di Trudinger:

Disuguaglianza di Moser-Trudinger

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$$u \in W_0^{1,N}(\Omega), \int_\Omega |\nabla u|^N \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}} \leq C$$

se e solo se $\alpha \leq \alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$.
(per $N = 2$, $\alpha \leq 4\pi$)

L'integrabilità esponenziale è legata al comportamento asintotico per $p \to +\infty$ della miglior costante di Sobolev

$$S_p(\Omega) = \inf_{0 \not\equiv u \in W_0^{1,N}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^N}{\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{N}{p}}}$$

Integrabilità esponenziale

Legame con la miglior costante di Sobolev

L'integrabilità esponenziale è legata al comportamento asintotico per $p \to +\infty$ della miglior costante di Sobolev

$$S_p(\Omega) = \inf_{0 \not\equiv u \in W_0^{1,N}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^N}{\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{N}{p}}}$$

La disuguaglianza di Moser-Trudinger con $\alpha = \alpha_N$ permette di ottenere il seguente risultato:

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$$S_p(\Omega) \sim \omega_{N-1} \left(\frac{N^2 e}{(N-1)p}\right)^{N-1} \quad \text{per } p \to +\infty$$

(per $N = 2$, $S_p(\Omega) \sim \frac{8\pi e}{p}$)

Funzioni estremali di Sobolev

Nel caso di aperti del piano, il risultato sulle miglior costanti di Sobolev fornisce informazioni sulle funzioni u_p estremali per $S_p(\Omega)$, cioè tali che

$$\int_\Omega |u_p|^p = 1 \qquad \int_\Omega |\nabla u_p|^2 = S_p(\Omega)$$

Funzioni estremali di Sobolev

Nel caso di aperti del piano, il risultato sulle miglior costanti di Sobolev fornisce informazioni sulle funzioni u_p estremali per $S_p(\Omega)$, cioè tali che

$$\int_\Omega |u_p|^p = 1 \qquad \int_\Omega |\nabla u_p|^2 = S_p(\Omega)$$

Adimurthi-Grossi

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\lim_{p \to +\infty} \max u_p(x) = \sqrt{e}$$

Funzioni estremali di Sobolev

Nel caso di aperti del piano, il risultato sulle miglior costanti di Sobolev fornisce informazioni sulle funzioni u_p estremali per $S_p(\Omega)$, cioè tali che

$$\int_\Omega |u_p|^p = 1 \qquad \int_\Omega |\nabla u_p|^2 = S_p(\Omega)$$

Adimurthi-Grossi

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\lim_{p \to +\infty} \max u_p(x) = \sqrt{e}$$

Ren-Wei

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\lim_{p \to +\infty} u_p(x) = \begin{cases} \sqrt{e} & \text{se } x = \widetilde{x} \\ 0 & \text{se } x \neq \widetilde{x} \end{cases}$$

Estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger

Nella seconda parte della tesi vengono studiate estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger a domini non limitati.

Estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger

Nella seconda parte della tesi vengono studiate estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger a domini non limitati.
In questo caso, la funzione integranda da considerare sarà

$$\Phi(u) = e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}} - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{\alpha_N^j |u|^{\frac{jN}{N-1}}}{j!}$$

(per $N = 2$, $\Phi(u) = e^{4\pi u^2} - 1$)

Estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger

Nella seconda parte della tesi vengono studiate estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger a domini non limitati.
In questo caso, la funzione integranda da considerare sarà

$$\Phi(u) = e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}} - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{\alpha_N^j |u|^{\frac{jN}{N-1}}}{j!}$$

(per $N = 2$, $\Phi(u) = e^{4\pi u^2} - 1$)

Diremo che vale la disuguaglianza di Moser-Trudinger su $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se

$$u \in W_0^{1,N}(\Omega), \int_\Omega |\nabla u|^N \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(u) \leq C$$

Il primo caso considerato è quello di metriche conformi sulla palla unitaria $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$.

Il primo caso considerato è quello di metriche conformi sulla palla unitaria $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$.
Mancini e Sandeep hanno dimostrato che

Mancini-Sandeep

Per ogni metrica conforme $g_\rho = \rho(x) g_e$ su B, vale la disuguaglianza di Moser-Trudinger su (B, g_ρ) se e solo se

$$\rho(x) \leq \frac{C}{(1 - |x|^2)^2}$$

Nel caso $N = 2$, alcune di queste metriche corrispondono ad aperti semplicemente connessi del piano euclideo.

Nel caso $N = 2$, alcune di queste metriche corrispondono ad aperti semplicemente connessi del piano euclideo.
In questo caso, Mancini e Sandeep danno un'altro risultato:

Mancini-Sandeep

Per ogni aperto semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, vale la disuguaglianza di Moser-Trudinger su Ω se e solo se

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{0 \not\equiv u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} > 0$$

È vero in generale che la validità di Moser-Trudinger equivale alla disuguaglianza di Poincaré

$$\lambda_1(B, g_\rho) = \inf_{0 \not\equiv u \in W_0^{1,N}(B, g_\rho)} \frac{\int_B |\nabla u|^N}{\int_B |u|^N dV_{g_\rho}} > 0$$

per ogni metrica conforme $g_\rho = \rho(x) g_e$ su B?

È vero in generale che la validità di Moser-Trudinger equivale alla disuguaglianza di Poincaré

$$\lambda_1(B, g_\rho) = \inf_{0 \not\equiv u \in W_0^{1,N}(B, g_\rho)} \frac{\int_B |\nabla u|^N}{\int_B |u|^N dV_{g_\rho}} > 0$$

per ogni metrica conforme $g_\rho = \rho(x) g_e$ su B?
Nella tesi abbiamo dimostrato che la risposta in generale è no.

Esistono metriche conformi su B per cui $\lambda_1(B, g_\rho) > 0$ ma non vale la disuguaglianza di Moser-Trudinger.

Estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger

Metriche sulla palla unitaria

Inoltre, per queste metriche vale la disuguaglianza di Moser-Trudinger "sottocritica", cioè con alcuni esponenti più piccoli di α_N:

$$u \in W_0^{1,N}(B, g_\rho), \int_B |\nabla u|^N \leq 1 \Rightarrow \int_B \Phi(\theta u) \leq C \text{ per qualche } \theta \in (0,1)$$

Inoltre, per queste metriche vale la disuguaglianza di Moser-Trudinger "sottocritica", cioè con alcuni esponenti più piccoli di α_N:

$$u \in W_0^{1,N}(B, g_\rho), \int_B |\nabla u|^N \leq 1 \ \Rightarrow \ \int_B \Phi(\theta u) \leq C \text{ per qualche } \theta \in (0,1)$$

Infine, per alcune di queste metriche, θ non può essere preso arbitrariamente vicino a 1, dunque l'esponente massimo per l'integrabilità esponenziale è più piccolo di α_N.

Estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger

Aperti euclidei illimitati

È vero in generale che la validità di Moser-Trudinger equivale alla disuguaglianza di Poincaré

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{0 \not\equiv u \in W_0^{1,N}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^N}{\int_\Omega |u|^N} > 0$$

per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$?

Estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger

Aperti euclidei illimitati

È vero in generale che la validità di Moser-Trudinger equivale alla disuguaglianza di Poincaré

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{0 \not\equiv u \in W_0^{1,N}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^N}{\int_\Omega |u|^N} > 0$$

per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$?
È facile vedere che se $\lambda_1(\Omega) = 0$ la disuguaglianza di Moser-Trudinger non può valere; tuttavia, un risultato simile vale per ogni dominio:

Ruf

Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$$u \in W_0^{1,N}(\Omega), \int_\Omega \left(|u|^N + |\nabla u|^N\right) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(u) \leq C$$

Da questo si ricava che $\lambda_1(\Omega) > 0$ implica la disuguaglianza di Moser-Trudinger per tutti gli esponenti sottocritici:

Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con $\lambda_1(\Omega) > 0$

$$u \in W_0^{1,N}(\Omega), \int_\Omega |\nabla u|^N \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(\theta u) \leq C \quad \forall \theta \in (0,1)$$

Estensioni della disuguaglianza di Moser-Trudinger

Aperti euclidei illimitati

Da questo si ricava che $\lambda_1(\Omega) > 0$ implica la disuguaglianza di Moser-Trudinger per tutti gli esponenti sottocritici:

Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con $\lambda_1(\Omega) > 0$

$$u \in W_0^{1,N}(\Omega), \int_\Omega |\nabla u|^N \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(\theta u) \leq C \quad \forall \theta \in (0,1)$$

Gabriele Mancini ha migliorato questo risultato, mostrando che vale Moser-Trudinger con esponente critico:

Gabriele Mancini

Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con $\lambda_1(\Omega) > 0$

$$u \in W_0^{1,N}(\Omega), \int_\Omega |\nabla u|^N \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(u) \leq C$$

Estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger

L'ultima parte della tesi riguarda la ricerca di funzioni estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger, ovvero

$$\widetilde{u} \in W_0^{1,N}(\Omega) \quad \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}|^N \leq 1 \qquad \int_\Omega e^{\alpha_N |\widetilde{u}|^{\frac{N}{N-1}}} = \sup_u \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$$

Estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger

L'ultima parte della tesi riguarda la ricerca di funzioni estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger, ovvero

$$\widetilde{u} \in W_0^{1,N}(\Omega) \quad \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}|^N \leq 1 \qquad \int_\Omega e^{\alpha_N |\widetilde{u}|^{\frac{N}{N-1}}} = \sup_u \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$$

Il problema è che potrebbero esistere successioni massimizzanti che non sono compatte per il funzionale di Moser-Trudinger, cioè

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{ma} \quad \int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \not\to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$$

Estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger

L'ultima parte della tesi riguarda la ricerca di funzioni estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger, ovvero

$$\widetilde{u} \in W_0^{1,N}(\Omega) \quad \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}|^N \le 1 \qquad \int_\Omega e^{\alpha_N |\widetilde{u}|^{\frac{N}{N-1}}} = \sup_u \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$$

Il problema è che potrebbero esistere successioni massimizzanti che non sono compatte per il funzionale di Moser-Trudinger, cioè

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{ma} \quad \int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \not\to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$$

Il teorema di concentrazione-compattezza stabilisce che, per aperti limitati, le successioni non compatte possono solo "concentrarsi" in un punto.

Teorema di concentrazione-compattezza

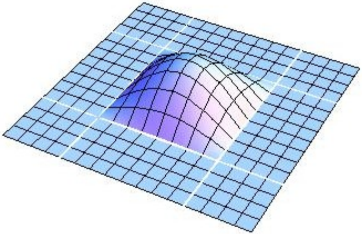
Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se u_k è una successione massimizzante e $u_k \rightharpoonup u$, allora vale una delle due condizioni:

- $\displaystyle\int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$ (Compattezza)
- $u \equiv 0$ e $e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \rightharpoonup C\delta_x$ per $x \in \overline{\Omega}$, $C \geq 0$ (Concentrazione)

Teorema di concentrazione-compattezza

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se u_k è una successione massimizzante e $u_k \rightharpoonup u$, allora vale una delle due condizioni:

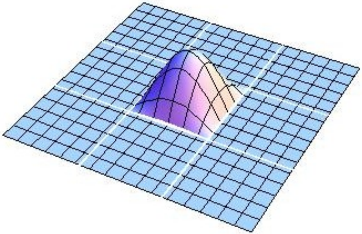
- $\displaystyle\int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$ (Compattezza)
- $u \equiv 0$ e $e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \rightharpoonup C\delta_x$ per $x \in \overline{\Omega}, C \geq 0$ (Concentrazione)



Teorema di concentrazione-compattezza

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se u_k è una successione massimizzante e $u_k \rightharpoonup u$, allora vale una delle due condizioni:

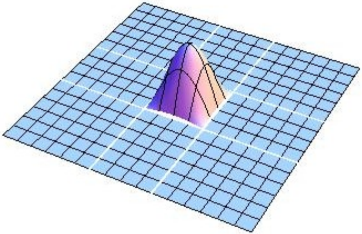
- $\displaystyle\int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$ (Compattezza)
- $u \equiv 0$ e $e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \rightharpoonup C\delta_x$ per $x \in \overline{\Omega}$, $C \geq 0$ (Concentrazione)



Teorema di concentrazione-compattezza

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se u_k è una successione massimizzante e $u_k \rightharpoonup u$, allora vale una delle due condizioni:

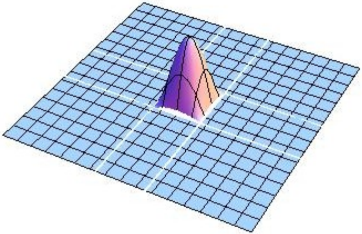
- $\displaystyle\int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$ (Compattezza)
- $u \equiv 0$ e $e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \rightharpoonup C\delta_x$ per $x \in \overline{\Omega}$, $C \geq 0$ (Concentrazione)



Teorema di concentrazione-compattezza

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se u_k è una successione massimizzante e $u_k \rightharpoonup u$, allora vale una delle due condizioni:

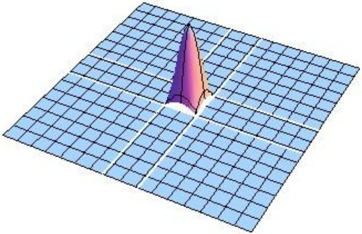
- $\int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$ (Compattezza)
- $u \equiv 0$ e $e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \rightharpoonup C\delta_x$ per $x \in \overline{\Omega}$, $C \geq 0$ (Concentrazione)



Teorema di concentrazione-compattezza

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se u_k è una successione massimizzante e $u_k \rightharpoonup u$, allora vale una delle due condizioni:

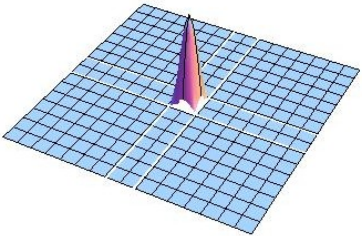
- $\displaystyle\int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$ (Compattezza)
- $u \equiv 0$ e $e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \rightharpoonup C\delta_x$ per $x \in \overline{\Omega}$, $C \geq 0$ (Concentrazione)



Teorema di concentrazione-compattezza

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se u_k è una successione massimizzante e $u_k \rightharpoonup u$, allora vale una delle due condizioni:

- $\displaystyle\int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to \int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}$ (Compattezza)
- $u \equiv 0$ e $e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \rightharpoonup C\delta_x$ per $x \in \overline{\Omega}$, $C \geq 0$ (Concentrazione)



Dunque, per mostrare l'esistenza di estremali su aperti limitati basta far vedere che le successioni massimizzanti non possono concentrarsi:

Estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger

Estremali su aperti limitati

Dunque, per mostrare l'esistenza di estremali su aperti limitati basta far vedere che le successioni massimizzanti non possono concentrarsi:

Carleson-Chang

Per ogni palla $B_R(\tilde{x}) \subset \mathbb{R}^N$ esistono funzioni estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger.

Flucher

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ esistono funzioni estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger.

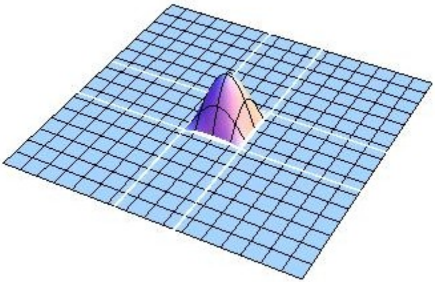
Lin

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ esistono funzioni estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger.

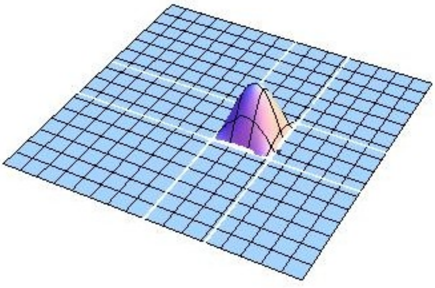
Questo ragionamento non si può ripetere su aperti non limitati, perchè il teorema di concentrazione-compattezza non è più valido.

Questo ragionamento non si può ripetere su aperti non limitati, perchè il teorema di concentrazione-compattezza non è più valido.
Oltre alla concentrazione e alla compattezza, le successioni massimizzanti potrebbero "scappare via" all'infinito (vanishing).

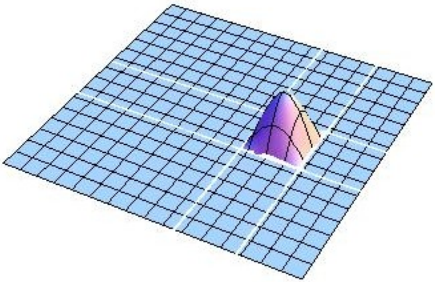
Questo ragionamento non si può ripetere su aperti non limitati, perchè il teorema di concentrazione-compattezza non è più valido.
Oltre alla concentrazione e alla compattezza, le successioni massimizzanti potrebbero "scappare via" all'infinito (vanishing).



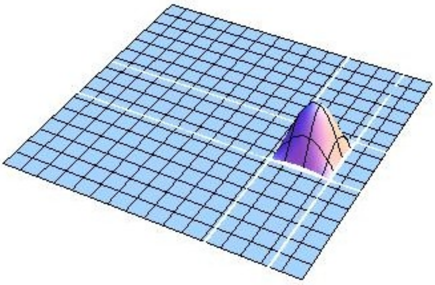
Questo ragionamento non si può ripetere su aperti non limitati, perchè il teorema di concentrazione-compattezza non è più valido.
Oltre alla concentrazione e alla compattezza, le successioni massimizzanti potrebbero "scappare via" all'infinito (vanishing).



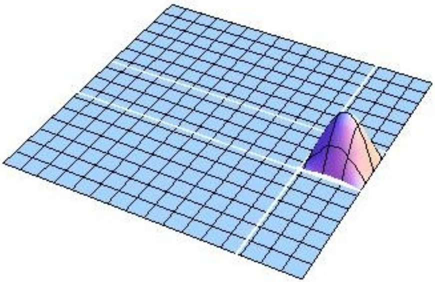
Questo ragionamento non si può ripetere su aperti non limitati, perchè il teorema di concentrazione-compattezza non è più valido.
Oltre alla concentrazione e alla compattezza, le successioni massimizzanti potrebbero "scappare via" all'infinito (vanishing).



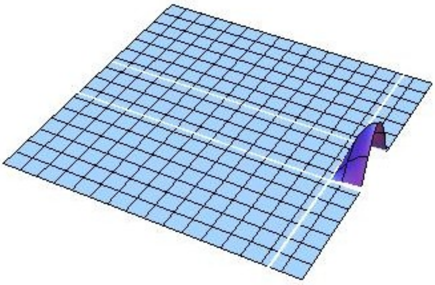
Questo ragionamento non si può ripetere su aperti non limitati, perchè il teorema di concentrazione-compattezza non è più valido.
Oltre alla concentrazione e alla compattezza, le successioni massimizzanti potrebbero "scappare via" all'infinito (vanishing).



Questo ragionamento non si può ripetere su aperti non limitati, perchè il teorema di concentrazione-compattezza non è più valido.
Oltre alla concentrazione e alla compattezza, le successioni massimizzanti potrebbero "scappare via" all'infinito (vanishing).



Questo ragionamento non si può ripetere su aperti non limitati, perchè il teorema di concentrazione-compattezza non è più valido.
Oltre alla concentrazione e alla compattezza, le successioni massimizzanti potrebbero "scappare via" all'infinito (vanishing).



Insieme a Gabriele Mancini abbiamo studiato il problema degli estremali per la striscia $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$.

Insieme a Gabriele Mancini abbiamo studiato il problema degli estremali per la striscia $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$.
La simmetria di Ω rispetto ad entrambi gli assi permette di restringersi a successioni massimizzanti che siano simmetriche rispetto ai due assi.

Insieme a Gabriele Mancini abbiamo studiato il problema degli estremali per la striscia $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$.
La simmetria di Ω rispetto ad entrambi gli assi permette di restringersi a successioni massimizzanti che siano simmetriche rispetto ai due assi.
Per queste successioni si può escludere sia la concentrazione sia il vanishing, dunque abbiamo dimostrato l'esistenza di estremali anche in questo caso:

Insieme a Gabriele Mancini abbiamo studiato il problema degli estremali per la striscia $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$.
La simmetria di Ω rispetto ad entrambi gli assi permette di restringersi a successioni massimizzanti che siano simmetriche rispetto ai due assi.
Per queste successioni si può escludere sia la concentrazione sia il vanishing, dunque abbiamo dimostrato l'esistenza di estremali anche in questo caso:

Per $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ esistono funzioni estremali per la disuguaglianza di Moser-Trudinger.

FINE

Grazie a tutti per l'attenzione!