Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I (fac-simile) - foglio 1/3*

Esercizio 1 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^e \ln^2 x \mathrm{d}x.$$

Soluzione: Integrando due volte per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln^2 x\mathrm{d}x &= \left[x\ln^2 x\right]_1^e - 2\int_1^e \ln x\mathrm{d}x \\ &= e - \left([2x\ln x]_1^e - \int_1^e 2\mathrm{d}x\right) \\ &= e - (2e - 2[x]_1^e) \\ &= e-2.\end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti) Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x-1-x}\mathrm{d}x; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x-1-x}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché $\frac{e^x-1-x}{x^2} \underset{x\to 0}{\rightarrow} \frac{1}{2}$, allora $\frac{\frac{1}{e^x-1-x}}{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{\rightarrow} \frac{1}{2}$, dunque la funzione ha lo stesso andamento di $\frac{1}{x^2}$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x-1-x}\mathrm{d}x \qquad \text{diverge.}$$

Quanto all'altro integrale, essendo $\frac{\frac{1}{e^x-1-x}}{e^{-x}} \underset{x\to +\infty}{\rightarrow} 1$, la funzione ha l'andamento di e^{-x} e cioè

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x-1-x}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I (fac-simile) - foglio 2/3*

Esercizio 3 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{\sqrt{k^2+1}}}, \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2^{\sqrt{k^2+1}}}.$$

Soluzione: Poiché $\sqrt[n]{\dfrac{n}{2^{\sqrt{n^2+1}}}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2^{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}} =\!\!\to \dfrac{1}{2} < 1$, dal criterio della radice otteniamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{\sqrt{k^2+1}}} \qquad \text{converge.}$$

Per lo stesso motivo, la seconda serie converge assolutamente e dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2^{\sqrt{k^2+1}}} \qquad \text{converge.}$$

Esercizio 4 (6 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^8 = 16\imath^3.$$

Soluzione: Il numero $w = 16\imath^3 = -16\imath$ in forma trigonometrica come $w = re^{\imath t}$ con $r = \sqrt{(0)^2 + (-16)^2} = 16$ e $t = \dfrac{3}{2}\pi$, le sue radici ottave sono $z = \sqrt[8]{16}e^{\imath\left(\frac{3}{16}\pi + \frac{2k\pi}{8}\right)}$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, cioè:

$$z = \sqrt{2}e^{\imath\left(\frac{3}{16}\pi + k\frac{\pi}{4}\right)}, \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I (fac-simile) - foglio 3/3*

Esercizio 5 (6 punti) Calcolare i seguenti coefficienti di Fourier:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x|x| \sin(nx)\mathrm{d}x; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x|x| \cos(nx)\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Essendo $x|x|\sin(nx)$ pari, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x|x| \sin(nx)\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\left[\frac{-x^2\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\frac{\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\left(-\frac{(-1)^n\pi^2}{n} + 2\left[x\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^2}\mathrm{d}x\right) = \\
&= 2\left(-\frac{(-1)^n\pi^2}{n} + 2\left[\frac{\cos(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= -2\pi^2\frac{(-1)^n}{n} + 4\frac{(-1)^n - 1}{n^3}.
\end{aligned}$$

Essendo $x|x|\cos(nx)$ dispari, si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} x|x| \cos(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.