Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 22/01/21 - foglio 1/3*

Esercizio 1 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2-\cos x}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con la sostituzione $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ si ottiene $x = 2\operatorname{arctg} t$, dunque $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2-\cos x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{1+3t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}t\right)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}t\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti) Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\mathrm{d}x; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\to} \frac{2}{\pi}$, allora $\frac{\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} \underset{x\to 0}{\to} \frac{\pi}{2}$, dunque l'integranda ha lo stesso andamento di $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

Quanto all'altro integrale, poiché $x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\to} 1$, allora $\frac{\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underset{x\to +\infty}{\to} 1$, dunque la funzione ha l'andamento di $\frac{1}{x}$ e cioè

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \qquad \text{diverge.}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 22/01/21 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \sin \frac{1}{k^2}}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 \sin \frac{1}{k^2}}.$$

Soluzione: Poiché $\frac{1}{n^2 \sin \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, allora la prima serie non è infinitesima e dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \sin \frac{1}{k^2}} \qquad \text{non converge.}$$

Per lo stesso motivo, anche la seconda serie non è infinitesima e dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 \sin \frac{1}{k^2}} \qquad \text{non converge.}$$

Esercizio 4 (6 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^6 = 2\sqrt{3}\imath - 2.$$

Soluzione: Scrivendo il numero $w = 2\sqrt{3}\imath - 2$ in forma trigonometrica come $w = re^{\imath t}$ con $r = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$ e $t = \frac{2}{3}\pi$, le sue radici seste sono $z = \sqrt[6]{4}e^{\imath\left(\frac{2}{18}\pi + \frac{2k\pi}{6}\right)}$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, cioè:

$$z = \sqrt[3]{2}e^{\imath\left(\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}\right)}, \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 22/01/21 - foglio 3/3*

Esercizio 5 (6 punti) Calcolare i seguenti coefficienti di Fourier:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\sin(nx)\mathrm{d}x; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Osservando che le funzioni $\sin(nx), x\cos(nx)$ sono dispari mentre $x\sin(nx), \cos(nx)$ sono pari si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\sin(nx)\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\left[x\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\left(-\frac{(-1)^n}{n}\pi - \left[\frac{-\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= -2\pi\frac{(-1)^n}{n};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\cos(nx)\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi} \pi\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.