Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 21/01/21 - foglio 1/3*

Esercizio 1 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin(2x)}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con le sostituzioni $t = 2x, s = \mathrm{tg}\frac{t}{2}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin(2x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1} \frac{1}{1+\frac{2s}{1+s^2}}\frac{2}{1+s^2}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{1} \frac{1}{(1+s)^2}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{1+s}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti) Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{x}+x^3)\,\mathrm{arctg}x}\mathrm{d}x; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x}+x^3)\,\mathrm{arctg}x}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché $\frac{\mathrm{arctg}x}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$, allora $\frac{\frac{1}{(\sqrt{x}+x^3)\mathrm{arctg}x}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} \underset{x\to 0}{\to} 1$, dunque l'integranda ha lo stesso andamento di $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{x}+x^3)\,\mathrm{arctg}x}\mathrm{d}x \qquad \text{diverge.}$$

Quanto all'altro integrale, poiché $\mathrm{arctg}x \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$, allora $\frac{\frac{1}{(\sqrt{x}+x^3)\mathrm{arctg}x}}{\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$, dunque la funzione ha l'andamento di $\frac{1}{x^3}$ e cioè

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x}+x^3)\,\mathrm{arctg}x}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 21/01/21 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{k+1}\right); \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(1-\cos\frac{1}{k+1}\right).$$

Soluzione: Poiché $\dfrac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{2}$, allora dal confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ si deduce che

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right) \qquad \text{converge.}$$

Per lo stesso motivo, la seconda serie converge assolutamente e dunque

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right) \qquad \text{converge.}$$

Esercizio 4 (6 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^6 = 2\imath - 2.$$

Soluzione: Scrivendo il numero $w = 2\imath - 2$ in forma trigonometrica come $w = re^{\imath t}$ con $r = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ e $t = \dfrac{3}{4}\pi$, le sue radici seste sono $z = \sqrt[6]{2\sqrt{2}}e^{\imath\left(\frac{3}{24}\pi+\frac{2k\pi}{6}\right)}$ con $k = 0,1,2,3,4,5$, cioè:

$$z = \sqrt[4]{2}e^{\imath\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{3}\right)}, \qquad \text{con } k = 0,1,2,3,4,5.$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 21/01/21 - foglio 3/3*

Esercizio 5 (6 punti) Calcolare i seguenti coefficienti di Fourier:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \sin(nx) \mathrm{d}x; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \cos(nx) \mathrm{d}x.$$

Soluzione: Osservando che le funzioni $\sin(nx), |x|\sin(nx)$ sono dispari mentre $\cos(nx), |x|\cos(nx)$ sono pari si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \sin(nx) \mathrm{d}x = 0;$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \cos(nx) \mathrm{d}x &= 2 \int_{0}^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) \mathrm{d}x \\
&= 2 \left(\left[(\pi - x) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} - \frac{\sin(nx)}{n} \mathrm{d}x \right) \\
&= -2 \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} \\
&= 2 \frac{1 - (-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.