Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 18/01/21 - foglio 1/3*

Esercizio 1 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con la sostituzione $t=\sqrt{2x-1}$ si ottiene $x=\dfrac{t^2+1}{2}$, dunque $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x &= \int_1^3 e^t t\mathrm{d}t\\ &= \left[te^t\right]_1^3-\int_1^3 e^t\mathrm{d}t\\ &= 3e^3-e-\left[e^t\right]_1^3+c\\ &= 2e^3.\end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti) Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^1 (\ln(1+x^\pi)-\pi\ln x)\mathrm{d}x, \qquad \int_1^{+\infty}(\ln(1+x^\pi)-\pi\ln x)\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché $\dfrac{(\ln(1+x^\pi)-\pi\ln x)}{\ln\frac{1}{x}}\underset{x\to+\infty}{\to}\pi$, dunque la funzione ha lo stesso andamento di $\ln\dfrac{1}{x}$ e quindi

$$\int_0^1 (\ln(1+x^\pi)-\pi\ln x)\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

Quanto all'altro integrale, poiché $\dfrac{(\ln(1+x^\pi)-\pi\ln x)}{\frac{1}{x^\pi}}=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^\pi}\right)}{\frac{1}{x^\pi}}\underset{x\to+\infty}{\to}1$, allora la funzione ha lo stesso andamento di $\dfrac{1}{x^\pi}$ e quindi

$$\int_1^{+\infty}(\ln(1+x^\pi)-\pi\ln x)\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 18/01/21 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!+1}{(k+1)!}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!+1}{(k+1)!}.$$

Soluzione: Poiché $\frac{\frac{n!+1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, allora dal confronto con la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ si deduce che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!+1}{(k+1)!} \qquad \text{non converge.}$$

Poiché $\dfrac{n!+1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)!}$ è positiva, infinitesima e decrescente, dal criterio di Leibniz si deduce che

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!+1}{(k+1)!} \qquad \text{converge.}$$

Esercizio 4 (6 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^4 = \frac{2\imath - 1}{1 + 3\imath}.$$

Soluzione: Il numero $w = \dfrac{2\imath-1}{1+3\imath} = \dfrac{2\imath-1}{1+3\imath}\dfrac{1-3\imath}{1-3\imath} = \dfrac{1+\imath}{2}$ in forma trigonometrica come $w = re^{\imath t}$ con $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $t = \frac{\pi}{4}$, le sue radici quarte sono $z = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{\imath\left(\frac{\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right)}$ con $k = 0, 1, 2, 3$, cioè:

$$z = \frac{1}{\sqrt[8]{2}} e^{\imath\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right)}, \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, 3.$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 18/01/21 - foglio 3/3*

Esercizio 5 (6 punti) Calcolare i seguenti coefficienti di Fourier:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\sin(nx)\mathrm{d}x; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Essendo $e^{|x|}\sin(nx)$ disppari, si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\sin(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

Essendo $e^{|x|}\cos(nx)$ pari, integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\cos(nx)\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi} e^{x}\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= 2\left([e^{x}\cos(nx)] + n\int_0^{\pi} e^{x}\sin(nx)\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\left((-1)^n e^{\pi} - 1 + n\left([e^{x}\sin(nx)]_0^{\pi} - n\int_0^{\pi} e^{x}\cos(nx)\right)\right) \\
&= 2\left(((-1)^n e^{\pi} - 1) - n^2\int_0^{\pi} e^{x}\cos(nx)\right) \\
&= 2((-1)^n e^{\pi} - 1) - n^2\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\cos(nx)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{2\left((-1)^n e^{\pi} - 1\right)}{1+n^2}.$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.