Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 10/12/20 - foglio 1/3*

Esercizio 1 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^{n^2}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{n^2}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{-\frac{n^2+1}{n+1}}\right)^{-\frac{n^2(n+1)}{n^2+1}}\\
&= \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{-\frac{n^2+1}{n+1}}\right)^{\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2(n+1)}{n^2+1}}\\
&= e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2(n+1)}{n^2+1}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\right).$$

Soluzione: Utilizzando lo sviluppo di Taylor

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-n\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)-n\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 10/12/20 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x}{1-\cos x}.$$

Soluzione: Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + O\left(x^2\right), \qquad \sin x = x + O\left(x^3\right), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O\left(x^3\right),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + O\left(x^2\right)\right)\left(x + O\left(x^3\right)\right) - x}{\frac{x^2}{2} + O\left(x^3\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + x^2 + O\left(x^3\right)\right) - x}{\frac{x^2}{2} + O\left(x^3\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O\left(x^3\right)}{\frac{x^2}{2} + O\left(x^3\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{O\left(x^3\right)}{x^2}}{\frac{1}{2} + \frac{O\left(x^3\right)}{x^2}} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(x^3+1\right)}{\ln x}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(x^3+1\right)}{\ln x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\right)}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{3\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\ln x} \\
&= 3 + \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\ln x} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 10/12/20 - foglio 3/3*

Esercizio 5 (10 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3},$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(1 punto) Eventuali punti di discontinuità e non derivabilità;

(2 punti) Studio della derivata prima con intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi;

(2 punti) Studio della derivata seconda con intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi.

Dominio: La funzione è definita per tutti valori che non annullano il denominatore, ovvero

$$\{x \neq -1\}.$$

Simmetrie:

La funzione non è pari né dispari né periodica.

Segno: Poiché il numeratore è sempre positivo, la funzione ha lo stesso segno del denominatore, cioè

$$f(x) > 0 \iff x > -1, \qquad f(x) < 0 \iff x < -1;$$

poiché la funzione non si annulla mai, allora

il grafico non interseca mai l'asse orizzontale,

essendo inoltre $f(0) = 1$ allora

l'intersezione con l'asse verticale ha luogo nel punto $(0, 1)$.

Estremi del dominio: I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to -1^{\pm}} = \pm\infty,$$

dunque la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale mentre la retta $x = -1$ è un asintoto verticale.

ontinuità e derivabilità:

La funzione è continua e derivabile su tutto il suo insieme di definizione.

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$$

è sempre negativa, tranne nel punto $x = 0$ in cui si annulla, dunque

$f(x)$ è decrescente su tutto il suo insieme di definizione e non ha né punti di massimo né di minimo.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{6x\left(2x^3 - 1\right)}{(1+x^3)^3};$$

dallo studio del segno dei singoli fattori

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
$6x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x^3 - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$1 + x^3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

deduciamo che:

$f(x)$ è convessa sugli intervalli $(-1, 0) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$,

$f(x)$ è concava sugli intervalli $(-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$,

$f(x)$ ha due punti di flesso in $x = 0, x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

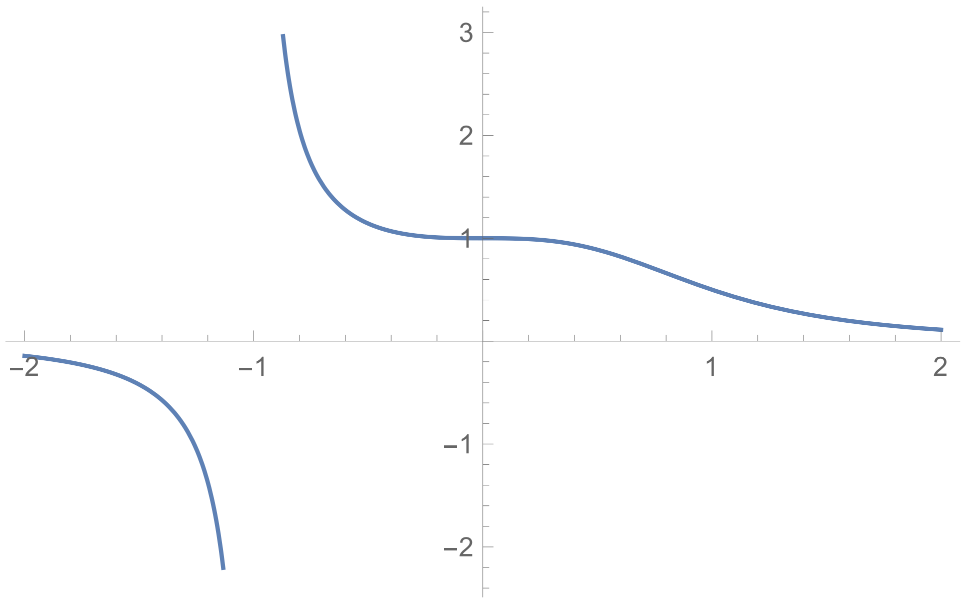

Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$.