Equazioni differenziali ordinarie

Prof. Vidossich - Anno Accademico $2011 - 2012$

Lezione $1 - 4/10/2011$

Teorema 1 (Esistenza locale)**.**
Siano $-\infty \le a < b \le +\infty$, $U \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto,* $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in U$ *e* $f \in C\left((a,b) \times U, \mathbb{R}^N\right)$.
Allora esiste (almeno) una soluzione per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

definita in un intorno di t_0.

Più precisamente, se M, δ, ε *sono tali che* $\begin{cases} \overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset U \\ \sup_{[t_0-\delta, t_0+\delta]\times\overline{B_\varepsilon(x_0)}} \|f\| \le M \\ M\delta \le \varepsilon \end{cases}$ *allora esiste una soluzione definita in* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *che assume valori in* $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$.

Dimostrazione.
È sufficiente dimostrare l'esistenza di soluzioni per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, per tempi precedenti all'istante iniziale il ragionamento è identico.
Considero la mappa T definita sullo spazio $X = C\left([t_0, t_0 + \delta], \overline{B_\varepsilon(x_0)}\right)$ come $Tx(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ innanzi tutto, $TX \subset X$ perché

$$\|Tx(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \le M\delta \le \varepsilon$$

inoltre

$$\|Tx(t) - Tx(s)\| \le \int_{s}^{t} \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \le M|t - s|$$

e dunque TX è un sottoinsieme di funzioni equicontinue e dunque, per il teorema di Ascoli-Arzelà, T è un operatore compatto e pertanto, essendo X convesso, grazie al teorema di punto fisso di Schauder, ammette (almeno) un punto fisso x tale che $Tx = x$, cioè una soluzione di (1). $\square$

Osservazione 1.
È possibile dare un'altra dimostrazione di questo teorema attraverso il cosiddetto "metodo di approssimazione di Tonelli": è sufficiente considerare la successione di funzioni

$$x_k(t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\delta}{k} \\ x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{\delta}{k}} f(\tau, x_k(\tau))d\tau & \text{se } t_0 + \frac{i}{k}\delta < t \leq t_0 + \frac{i+1}{k}\delta \text{ per } i \in \{1, \ldots, k+1\} \end{cases}$$

Innanzi tutto, f è ben definita su ogni sottointervallo $\left(t_0 + \dfrac{i}{k}\delta, t_0 + \dfrac{i+1}{k}\delta\right]$, perché l'integrale viene fatto su un sottoinsieme del precedente sottointervallo; ragionando come prima, x_k è una successione di funzioni equicontinue ed equilimitate, pertanto (a meno di estratte) convergono uniformemente ad una certa x, che dovrà essere tale che $Tx = x$, e cioè una soluzione di (1).

Proposizione 2 (Prolungamento delle soluzioni)**.**
Sia x una soluzione del problema di Cauchy (1) definita su $[t_0, c)$ tale che esiste $\lim_{t \to c} x(t) = y \in U$.
Allora la soluzione si può prolungare oltre c, ovvero esistono $\delta > 0, u \in C^1([t_0, c + \delta])$ tali che u risolve (1) e $u|_{[t_0,c)} = x$.

Dimostrazione.
Per il teorema 1, il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{z}(t) = f(t, z(t)) \\ z(c) = y \end{cases}$ ammette una soluzione in $[c, c + \delta]$; per la continuità di f e l'esistenza del limite di x, si ha

$$\lim_{t \to c} \dot{x}(t) = \lim_{t \to c} f(t, x(t)) = f(c, y) = \dot{z}(c)$$

e dunque la soluzione $u(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } t \in [t_0, c) \\ z(t) & \text{se } t \in [c, c + \delta] \end{cases}$ è un prolungamento di x. □

Osservazione 2.
Così come il teorema 1, anche il prolungamento funziona allo stesso modo per tempi precedenti all'istante iniziale.

Osservazione 3.
In realtà, la condizione di esistenza del limite nell'enunciato di 2 può essere indebolita: è sufficiente l'esistenza di una sottosuccessione $t_k \underset{k \to +\infty}{\to} c$ tale che $x(t_k) \underset{k \to +\infty}{\to} y \in U$.

Corollario 3.
Se il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione x in $[t_0, c)$, allora le seguenti condizioni si equivalgono

1. *La soluzione non è estendibile.*
2. *Per ogni compatto $K \subset U$ esiste $t(K)$ tale che $x|_{[t(K),c)} \notin K$.*

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$ Se esiste $\widetilde{K} \Subset U$ tale che $x(t_k) \in \widetilde{K}$ per una successione $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} c$, allora $x(t_k)$ ammette limite (a meno di estratte) e dunque, grazie all'ultima osservazione 2, è estendibile.

$2 \Rightarrow 1$ Se la soluzione è estendibile, allora è definita in $[t,c]$, e dunque appartiene al compatto $x([t,c])$.

□

Teorema 4 (Dipendenza continua dai dati iniziali)**.**
Siano $-\infty \le a < b \le +\infty$, $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $t_{0,k} \in (a,b)$, $x_{0,k} \in U$ e $f_k \in C((a,b)\times U, \mathbb{R}^N)$ tali che $t_{0,k} \underset{k\to+\infty}{\to} t_0$, $x_{0,k} \underset{k\to+\infty}{\to} x_0$, $f_k \underset{k\to+\infty}{\to} f$ uniformemente sui sottoinsiemi compatti di (a,b) e x_k risolve

$$\begin{cases} \dot{x_k}(t) = f_k(x_k(t),t) \\ x(t_{0,k}) = x_{0,k} \end{cases} \tag{2}$$

Allora x_k converge (a meno di estratte) alla soluzione di (1) uniformemente sui compatti.

Dimostrazione.
Dimostro innanzi tutto il teorema in un intorno di t_0: applichiamo il teorema 1 ai problemi di Cauchy (2); scegliendo M, δ, ε tali che

$$\begin{cases} \overline{B_{2\varepsilon}(x_0)} \subset U \\ [t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta] \subset (a,b) \\ \sup_{[t_0-2\delta,t_0+2\delta]\times\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}} \|f\| \le M-1 \\ M\delta \le \varepsilon \end{cases}$$

si ottiene che le condizioni sono soddisfatte anche da $t_{0,k}$ e $x_{0,k}$, mentre $\sup\limits_{[t_{0,k}-2\delta,t_{0,k}+2\delta]\times\overline{B_{2\varepsilon}(x_k)}} \|f\| \le M$ e dunque le x_k sono definite in $[t_k - 2\delta, t_k + 2\delta] \supset [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e assumono valori in $\overline{B_{2\varepsilon}(x_{0,k})} \supset \overline{B_\varepsilon(x_0)}$; come nel teorema di esistenza locale 1, le x_k sono equicontinue ed equilimitate, pertanto (a meno di estratte) convergeranno a una certa x uniformemente su ogni compatto contenuto in (a,b), e x sarà necessariamente una soluzione di (1).
Per estendere le soluzioni, considero

$$\mathcal{H} = \{(t, \{w_k\}) : t_0 < t < b, w_k \text{ è un'estratta di } x_k \text{ che converge a una certa } w$$

$$\text{uniformemente sui compatti di } [t_0,t)\}$$

su cui definisco la relazione d'ordine

$$(t_1, w_{1,k}) \preceq (t_2, w_{2,k}) \iff \begin{cases} t_1 \le t_2 \\ \lim_{k\to+\infty} w_{1,k} = \lim_{k\to+\infty} w_{2,k} \text{ su } [t_0,t_1] \end{cases}$$

A questo punto è sufficiente dimostrare che ogni catena in $\mathcal{H}$ ammette un maggiorante; infatti, $\mathcal{H} \neq \emptyset$ per la prima parte della dimostrazione, e dunque per

il Lemma di Zorn $\mathcal{H}$ dovrà avere un elemento massimale (c, u_k), ma per massimalità si dovrà avere $c = b$ e dunque u_k sarà l'estratta di x_k con le proprietà richieste.
Consideriamo una catena $\{(t_\alpha, w_{\alpha,k})\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{H}$ e poniamo $c := \sup\limits_{\alpha \in A} t_\alpha$; data una successione $t_{\alpha_j} \underset{j\to+\infty}{\nearrow} c$, $w_{\alpha_j,k} \underset{k\to+\infty}{\to} w$ uniformemente su ogni compatto contenuto in $[t_0, c)$ e indipendentemente da j, in particolare su $\left[t_0, t_{\alpha_j} - \frac{1}{j}\right]$; prendendo infine n_j in modo tale che $\sup\limits_{\left[t_0, t_{\alpha_j} - \frac{1}{j}\right]} \|w_{\alpha_j,n_j} - w\| \leq \frac{1}{j}$, ho che w_{α_j,n_j} è una successione di funzioni che converge a w uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di $[t_0, c)$, e pertanto è un maggiorante della catena. $\square$

Osservazione 4.
Nel caso di soluzione unica, prendendo $f_k \equiv f$ e $t_{0,k} \equiv t_0$ si ottiene il "classico" teorema di dipendenza continua dai dati iniziali, che dunque è un caso particolare del teorema 4.

Corollario 5.
Se esiste una soluzione del problema di Cauchy (1) definita su $[t_0, c]$, allora l'insieme delle soluzioni è connesso in $C\left([t_0, c], \mathbb{R}^N\right)$.

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che l'insieme S delle soluzioni si possa scrivere come $S_1 \sqcup S_2$ con $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$ chiusi.
Fissati $u_1 \in S_1$, $u_2 \in S_2$ e una successione di funzioni $f_k \in C^\infty([t_0, c])$ che approssima f uniformemente sui compatti, allora la successione $f_{i,k}(t,x) := f_k(t,x) - f_k(t, u_i(t)) + f(t, u_i(t))$ converge anch'essa ad f uniformemente sui compatti, e inoltre u_i è l'unica soluzione di $\begin{cases} \dot{u_i}(t) = f_{i,k}(t, u_i(t)) \\ u_i(t_0) = x_0 \end{cases}$.
Considero ora il funzionale $\varphi(u) = d(u, S_1) - d(u, S_2) : S \to \mathbb{R}$, intendendo per distanza quella indotta dalla norma $\sup\limits_{[t_0,c]} \|\cdot\|$; per la chiusura degli S_i si ha $\varphi|_{S_1} < 0 < \varphi|_{S_2}$, in particolare per le u_i; il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u_{k,\lambda}}(t) = \lambda f_{1,k}(t, u_{k,\lambda}(t)) + (1-\lambda) f_{2,k}(t, u_{k,\lambda}) \\ u_{k,\lambda}(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che, per il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali 4, dipende in maniera continua dal parametro λ; per $\lambda = 0, 1$ si ha $u_{k,0} = u_2$ e $u_{k,1} = u_1$, dunque $\varphi(u_{k,1}) < 0 < \varphi(u_{k,0})$ e quindi, per λ_k opportuno, $\varphi(u_{k,\lambda_k}) = 0$; a meno di estratte, si avrà $\lambda_k \underset{k\to+\infty}{\to} \lambda_\infty$ e inoltre $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k f_{1,k} + (1-\lambda_k) f_{2,k} = f$, pertanto grazie al teorema di dipendenza continua dai dati iniziali 4 u_{k,λ_k} converge (a meno di estratte) ad una soluzione u di (1) che verifica $\varphi(u) = 0$, il che è assurdo, perché $\varphi|_{S_1} < 0 < \varphi|_{S_2}$. $\square$

Corollario 6.
Se esiste una soluzione del problema di Cauchy (1) definita su $[t_0, c)$*, allora l'insieme delle soluzioni è compatto in* $C\left([t_0, c), \mathbb{R}^N\right)$.

Dimostrazione.
Se x_k è una successione di soluzioni di (1), allora applicando il teorema 4 con $t_{0,k} \equiv t_0$, $x_{0,k} \equiv x_0$ e $f_k \equiv f$ si ottiene che x_k ha un'estratta convergente a una soluzione x dello stesso problema di Cauchy, pertanto l'insieme delle soluzioni è compatto. □

Corollario 7.
Se esiste un'unica soluzione $\sigma(t, t_0, x_0)$ *del problema di Cauchy (1), allora* σ *è continua e*

$$\Omega := \{(t, t_0, x_0) : t \text{ è nel dominio massimale di } \sigma(t, t_0, x_0)\}$$

è aperto in $\mathbb{R}^{N+2}$.

Dimostrazione.
La continuità di σ segue dalla continuità di x e dal teorema 4.
Se per assurdo Ω non fosse aperto, allora esisterebbe una successione $(t_k, t_{0,k}, x_{0,k}) \in \Omega^c$ convergente a $(t, t_0, x_0) \in \Omega$.
Prendendo compatto K contenuto nell'intervallo massimale di esistenza $\left(t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0)\right)$ di $\sigma(t, t_0, x_0)$ tale che $t \in \overset{\circ}{K}$; allora, anche $t_k \in K$ per k grandi, inoltre le soluzioni con dati iniziali $(t_{0,k}, x_{0,k})$ sono definite su K, pertanto $t_k \in K \subset \left(t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0)\right)$, e cioè $(t_k, t_{0,k}, x_{0,k}) \in \Omega$, assurdo. □

Osservazione 5.
Il corollario 7 non è più vero se si elimina l'ipotesi di unicità della soluzione.

Lezione 2 – 11/10/2011

Lemma 8.
Siano $U \subset \mathbb{R}$ *un aperto e* $\omega_1, \omega_2 \in C([a, b] \times U, \mathbb{R})$ *tali che* $\omega_1(t, x) < \omega_2(t, x)$ *per ogni* $(t, x) \in [a, b] \times U$.
Se u_1, u_2 *risolvono*

$$\begin{cases} \dot{u}_i(t) = \omega_i(t, u_i(t)) \\ u_i(a) = u_{i,a} \end{cases} \quad \text{per } i = 1, 2$$

e $u_{1,a} < u_{2,a}$*, allora* $u_1(t) < u_2(t)$ *per ogni* $t \in [a, b]$.

Dimostrazione.
Se per assurdo non fosse così, esisterebbe un $t_0 \in (a, b)$ tale che

$$\begin{cases} u_1(t_0) = u_2(t_0) \\ u_1(t) < u_2(t) \qquad \text{se } t \in [a, t_0) \end{cases} \tag{3}$$

ma allora

$$\dot{u_1}(t_0) = \omega_1(t_0, u_1(t_0)) = \omega_1(t_0, u_2(t_0)) < \omega_2(t_0, u_2(t_0)) = \dot{u_2}(t_0)$$

e, per continuità, la disuguaglianza stretta vale anche per $t \in (t_0 - \delta, t_0)$, ma in questo caso

$$u_1(t) = u_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{u_1}(\tau)d\tau > u_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{u_2}(\tau)d\tau = u_2(t)$$

contraddicendo (3). □

Osservazione 6.
Grazie al lemma 8, ogni problema di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \omega(t, u(t)) \\ u(a) = u_a \end{cases} \tag{4}$$

ha una soluzione u_∞ "massimale", nel senso che qualsiasi altra soluzione u di (4) verifica $u(t) \leq u_\infty(t)$ per ogni $t \in [a, b]$.
Infatti, prendendo una successione u_k dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u_k}(t) = \omega(t, u_k(t)) + \frac{1}{k} \\ u_k(a) = u_a + \frac{1}{k} \end{cases} \tag{5}$$

dal lemma 8 si ottiene che $u < u_k$ su $[a, b]$, mentre dal teorema di dipendenza continua dai dati iniziali 4 si ottiene, a meno di estratte, $u_k \underset{k \to +\infty}{\to} u_\infty$ per una qualche u_∞ che risolve (4), e dunque $u \leq u_\infty$ su $[a, b]$.
Analogamente, considerando i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u_k}(t) = \omega(t, u_k(t)) - \frac{1}{k} \\ u_k(a) = u_a - \frac{1}{k} \end{cases}$$

si mostra l'esistenza di una soluzione "minimale" u_0 tale che $u_0 \leq u$ per ogni soluzione u di (4).

Teorema 9.
Sia $\omega \in C([a, b] \times U, \mathbb{R})$ e $v : [a, b] \to U$ assolutamente continua che verifica

$$\begin{cases} \dot{v}(t) \leq \omega(t, v(t)) \quad q.o. \ su \ [a, b] \\ v(a) = u_a \end{cases}$$

allora $v(t) \leq u_\infty(t)$ per ogni $t \in [a, b]$, dove u_∞ è la soluzione massimale di (4).

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che sia falso; poniamo

$$\overline{\omega}(t, x) = \begin{cases} \omega(t, x) & \text{se } x \geq v(t) \\ \omega(t, v(t)) & \text{se } x < v(t) \end{cases}$$

e prendiamo una soluzione del problema di Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \overline{\omega}(t, y(t)) \\ y(a) = u_a \end{array} \right.$.
Mostriamo che $y \geq v$ su tutto $[a, b]$: se per assurdo si avesse

$$\left\{ \begin{array}{ll} y(t) < v(t) & \text{su } t \in (t_1, t_2] \\ y(t_1) = v(t_1) & \end{array} \right.$$

per qualche $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, allora si avrebbe anche

$$0 < v(t_2) - y(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}(\tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}(\tau) d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \omega(\tau, v(\tau)) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \overline{\omega}(\tau, y(\tau)) d\tau = 0$$

Dunque, si deve avere $y(t) \geq v(t)$ per ogni $t \in [a, b]$, e quindi y in realtà risolve (4) e pertanto $v \leq y \leq u_\infty$ su tutto $[a, b]$. □

Teorema 10 (Esistenza globale)**.**
Siano $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto e $f \in C\left([a, b] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right)$, $u \in C([a, b] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tali che

$$\langle f(t, x), x \rangle \leq \omega(t, \|x\|)\|x\| \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N$$

Se il problema di Cauchy (4) ha una soluzione massimale globale, allora anche il problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(a) = x_a \end{array} \right. \tag{6}$$

ha una soluzione globale, per ogni $x_a \in \mathbb{R}^N$ tale che $\|x_a\| \leq u_a$.

Dimostrazione.
La soluzione massimale u_∞ di (4) è tale che $y = \dfrac{{u_\infty}^2}{2}$ risolve

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \dot{u}(t)u(t) = \omega(t, u(t))u(t) = \omega\left(t, \sqrt{2y(t)}\right)\sqrt{2y(t)} \\ y(a) = \sqrt{2u_a} \end{array} \right.$$

Inoltre, la funzione $v = \dfrac{\|x\|^2}{2}$ verifica

$$\dot{v}(t) = \langle \dot{x}(t), x(t) \rangle = \langle f(t, x(t)), x(t) \rangle \leq \omega(t, \|x(t)\|)\|x(t)\| = \omega\left(t, \sqrt{2v(t)}\right)\sqrt{2v(t)}$$

e dunque, per il teorema 9

$$\frac{\|x(t)\|^2}{2} = v(t) \leq y(t) = \frac{\|u_\infty(t)\|^2}{2}$$

pertanto $\|x\| \leq \|u_\infty\|$; poiché u_∞ è una soluzione globale, è limitata, e dunque lo è anche $\|x\|$, che quindi è globale. □

Corollario 11.
Se f, ω *verificano la condizione*

$$\langle f(t,x) - f(t,y), x - y\rangle \leq \omega(t, \|x-y\|)\|x-y\| \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^N$$

e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \omega(t, u(t)) \\ u(a) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

ha solo la soluzione banale $u \equiv 0$*, allora il problema di Cauchy* (6) *ha un'unica soluzione.*

Dimostrazione.
Date due soluzioni x, y di (6), la funzione $v = \dfrac{\|x-y\|^2}{2}$ verifica

$$\dot{v}(t) = \langle \dot{x}(t) - \dot{y}(t), x(t) - y(t)\rangle = \langle f(t, x(t) - y(t)), x(t) - y(t)\rangle \leq$$

$$\leq \omega(t, \|x(t) - y(t)\|)\|x(t) - y(t)\| = \omega\left(t, \sqrt{2v(t)}\right)\sqrt{2v(t)}$$

e dunque, per ogni soluzione y del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \dot{u}(t)u(t) = \omega\left(t, \sqrt{2y(t)}\right)\sqrt{2y(t)} \\ y(a) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

si deve avere $v \leq y$, ma (8) ha solo la soluzione banale, perché per ogni sua soluzione y, la funzione $u = \sqrt{2y}$ verifica

$$\dot{u}(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{2y(t)}} = \omega\left(t, \sqrt{2y(t)}\right) = \omega(t, u(t))$$

e dunque è soluzione di (7); pertanto, $v \equiv 0$ e cioè $x(t) = y(t)$ per ogni $t \in [0,1]$, ovvero la soluzione di (7) è unica. □

Corollario 12.
Se $f(t,x) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *decresce in* x *a ogni* t *fissato, allora il problema di Cauchy* (6) *ha un'unica soluzione, che è globale.*

Dimostrazione.
La condizione di decrescenza si può riscrivere come $(f(t,x) - f(t,y))(x-y) \leq 0$, dunque applicando il corollario 11 con $\omega \equiv 0$ si ottiene l'unicità; inoltre, $f(t,x)x \leq f(t,0)x \leq |f(t,0)||x|$, e dunque si può applicare il teorema 10 con $\omega(t,x) = f(t,0)$ per avere l'esistenza globale. □

Corollario 13.
Se $|f(t,x)| \leq A(t)|x| + B(t)$*, allora esiste una soluzione globale del problema di Cauchy* (6)*.*

Dimostrazione.
Essendo

$$\langle f(t,x), x\rangle \leq |f(t,x)||x| \leq (A(t)|x| + B(t))|x|$$

si può applicare il teorema 10, perché il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A(t)u(t) + B(t) \\ u(a) = u_a \end{cases}$$

ha una soluzione globale. $\square$

Corollario 14.
Se $f(t,x) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è localmente Lipschitz in x, allora il problema di Cauchy (6) ha un'unica soluzione, che è globale.

Dimostrazione.
Detta L la costante di Lipschitz di f, si ha

$$\langle f(t,x) - f(t,y), x - y\rangle \leq |f(t,x) - f(t,y)||x-y| \leq L|x-y|^2$$

e dunque si può applicare il corollario 11 con $\omega(t,x) = Lx$. $\square$

Teorema 15.
Se f è di classe C^1, allora l'unica soluzione $\sigma(t,t_0,x_0)$ del problema di Cauchy (1) è una funzione di classe C^1.

Dimostrazione.
Si può supporre per simplicità $N = 1$; posto

$$z_h(t) = \frac{\sigma(t,t_0,x_0+h) - \sigma(t,t_0,x_0)}{h}$$

è sufficiente passare al limite per $h \to 0$:

$$\dot{z_h}(t) = \frac{f(t_0, \sigma(t,t_0,x_0+h)) - f(t_0,\sigma(t,t_0,x_0))}{h} =$$

$$= \frac{\sigma(t,t_0,x_0+h) - \sigma(t,t_0,x_0)}{h} \underbrace{\int_0^1 f_x(t_0, \sigma(t,t_0,x_0) + \xi(\sigma(t,t_0,x_0+h) - \sigma(t,t_0,x_0)))d\xi}_{A_h(t)} =$$

$$= A_h(t) z_h(t)$$

Poiché $A_h(t) \underset{h\to 0}{\to} f_x(t_0, \sigma(t,t_0,x_0))$ uniformemente e

$$z_h(t_0) = \frac{\sigma(t_0,t_0,x_0+h) - \sigma(t_0,t_0,x)}{h} = \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1$$

allora per il teorema di dipendenza continua 4 $z_h \underset{h\to 0}{\to} z$, indipendentemente dall'estratta $h_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ perché la soluzione è unica, e z risolve

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f_x(t, \sigma(t,t_0,x_0))z(t) \\ z(t_0) = 1 \end{cases}$$

e dunque è continua in tutti i suoi argomenti, quindi $\sigma_x(t,t_0,x)$ è continua. $\square$

Osservazione 7.
In dimensione $N \geq 2$ la dimostrazione è identica; in questo caso, σ_x è una matrice $N \times N$ che risolve

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f_x(t, \sigma(t, t_0, x_0)) \cdot z(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \tag{9}$$

con $z_0 = \mathbb{I}_N$.

Definizione 1.
L'equazione (9) è detta **equazione variazionale** e questa soluzione è detta **soluzione principale**.

Osservazione 8.
La soluzione principale è caratterizzata dalla proprietà che la soluzione con dato iniziale arbitrario z_0 è $z(t) \cdot z_0$

Proposizione 16.
Siano $p \in C(I, \mathbb{R})$ e $f(t, x, \lambda) \in C\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times I, \mathbb{R}^N\right)$ periodica nella variabile t di periodo $p(\lambda)$.
Se l'equazione

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t), \lambda_0) \tag{10}$$

ha una soluzione u_0 che è $p(\lambda_0)$-periodica e l'equazione variazionale $\dot{z} = f_x(t, u_0(t), \lambda_0) \cdot z$ ha come unica soluzione $p(\lambda_0)$-periodica quella banale, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'equazione (10) ha una soluzione $p(\lambda)$-periodica per ogni $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$

Dimostrazione.
Detta $\sigma(t, 0, x_0, \lambda)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t), \lambda) \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

è sufficiente far vedere che per ogni $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$

$$x = \sigma(0, 0, x, \lambda) = \sigma(p(\lambda), 0, x, \lambda)$$

cioè che per ogni λ esiste un $x(\lambda)$ che verifica

$$\sigma(p(\lambda), 0, x(\lambda), \lambda) - x(\lambda) = 0$$

Posta $F(x, \lambda) = \sigma(p(\lambda), 0, x, \lambda) - x$, per ipotesi $F(x_0, \lambda_0) = 0$, e dunque grazie al teorema della funzione implicita basta mostrare che $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, \lambda_0)$ è una matrice invertibile; tuttavia, se

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \lambda_0) z_0 = \sigma_x(p(\lambda_0), 0, x_0, \lambda_0) z_0 - z_0$$

allora $\sigma_x(t, 0, x_0, \lambda_0) z_0$ è una soluzione $p(\lambda_0)$-periodica dell'equazione variazionale

$$\begin{cases} \dot{z} = f_x(t, u_0(t), \lambda_0) \cdot z \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

e dunque per ipotesi dev'essere $\sigma_x(t, 0, x_0, \lambda_0) z_0 \equiv z_0 \equiv 0$, cioè $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, \lambda_0)$ ha nucleo banale e cioè è invertibile. $\square$

Lezione 3 – 18/10/2011

Teorema 17.
Sia $f \in C^1\left([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ *tale che* $|f(t,x,y)| \leq A + B\|x\| + C\|y\|$ *per* $A, B, C > 0$ *opportuni.*
Se $b - a \notin \pi\mathbb{N}$*, allora esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che per ogni* $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ *il problema*

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \varepsilon f(t, u(t), \dot{u}(t)) - u(t) \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases} \tag{11}$$

ha un'unica soluzione

Dimostrazione.
Innanzi tutto, la condizione di crescita su f garantisce, per ogni $c \in [a,b]$, che l'esistenza di un'unica soluzione globale del problema

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \varepsilon f(t, u(t), \dot{u}(t)) - u(t) \\ u(a) = 0 \\ \dot{u}(a) = c \end{cases}$$

che verrà chiamata $\sigma(t, \varepsilon, c)$; questa funzione risolverà il problema (11) se e solo se $F(\varepsilon, c) := \sigma(b, \varepsilon, c) = 0$.
Per $\varepsilon = 0$ si ottiene $\sigma(b, 0, c) = c \sin(b-a)$, dunque $F(0,0) = 0$, e inoltre $\dfrac{\partial F}{\partial c}(0,0) = \sin(b-a) \neq 0$, dunque si può applicare il teorema della funzione implicita e ottenere che esistono $\varepsilon_0 > 0$ e un'unica $c(\varepsilon) : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^N$ tale che $\sigma(b, \varepsilon, c(\varepsilon)) = F(\varepsilon, c(\varepsilon)) = 0$, e dunque $u(t) = \sigma(t, \varepsilon, c(\varepsilon))$ è l'unica soluzione del problema (11). $\square$

Teorema 18.
Siano $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *e* $A_0, B_0 \in \mathbb{R}$ *tali che il problema*

$$\begin{cases} \ddot{u_0}(t) = f(t, u_0(t), \dot{u_0}(t)) \\ u_0(a) = A_0 \\ u_0(b) = B_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione e $f_x(t, u_0(t), \dot{u_0}(t))$.
Allora, esiste $\varepsilon_0 > 0$ *tale che per ogni* A, B *con* $|A - A_0|, |B - B_0| \leq \varepsilon_0$ *il problema*

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)) \\ u(a) = A \\ u(b) = B \end{cases} \tag{12}$$

ammette anch'esso un'unica soluzione.

Dimostrazione.
Essendo f di classe C^1, per ogni $c \in [a,b]$ il problema

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)) \\ u(a) = A \\ \dot{u}(a) = c \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $\sigma(t, A, c)$ che, per il teorema di dipendenza continua 4, è globale se $|A - A_0|, |c - \dot{u_0}(a)| \leq \eta$ per η piccolo; posto $F(A, B, c) = \sigma(b, A, c) - B$, si ha $F(A_0, B_0, \dot{u_0}(a)) = 0$, inoltre $\dfrac{\partial F}{\partial c}(A_0, B_0, \dot{u_0}(a)) = \sigma_c(b, A_0, \dot{u_0}(a))$; dunque, una volta dimostrato che quest'ultimo valore è diverso da 0, si potrà applicare (come nel teorema 17) il teorema della funzione implicita per concludere che esistono $\varepsilon > 0$ e un'unica $c(A, B)$ tale che $F(A, B, c(A, B)) = 0$, e dunque il problema (12) ammette come unica soluzione $u(t) = \sigma(t, A, c(A, B))$.
La funzione $w(t) := \sigma_c(t, A_0, \dot{u_0}(a))$ è soluzione di

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) = f_x(t, u_0(t)\dot{u_0}(t)), w(t) + f_y(t, u_0(t), \dot{u_0}(t))\dot{w}(t) \\ w(a) = 0 \\ \dot{w}(a) = 1 \end{cases}$$

e dunque dev'essere $w > 0$ su $[a, b]$: infatti, w dev'essere strettamente positiva in un intorno di a, perché $w(a) = 0$ e $\dot{w}(a) > 0$, dunque se esistesse t_1 tale che

$$\begin{cases} w(t) > 0 & \text{per } t \in (a, t_1) \\ w(t_1) = 0 \end{cases}$$

allora w dovrebbe avere un punto di massimo $t_2 \in (a, t_1)$ tale che $\ddot{w}(t_2) \leq 0$, ma questo è assurdo perché

$$0 \leq \ddot{w}(t_2) = f_x(t, u_0(t_2), \dot{u_0}(t_2))w(t_2) + f_y(t, u_0(t_2), \dot{u_0}(t_2))\dot{w}(t_2) =$$
$$= f_x(t, u_0(t_2), \dot{u_0}(t_2))w(t_2) > 0$$

dunque in particolare $0 < w(b) = \dfrac{\partial F}{\partial c}(A_0, B_0, \dot{u_0}(a))$ e quindi la dimostrazione è completa. $\square$

Proposizione 19.
Sia $\omega : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *localmente Lipschitz e* u, v *tali che*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \omega(t, u(t)) \\ u(a) = u_a \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{v}(t) \leq \omega(t, v(t)) \\ v(a) \leq u_a \end{cases}$$

Allora, preso comunque $t_0 \in [a, b]$*, o* $u(t) = v(t)$ *per ogni* $t \in [a, t_0]$*, oppure* $u(t) < v(t)$ *per ogni* $t \in [a, t_0]$.

Dimostrazione.
Posta $w = u - v$, dal teorema 9 si ha $w \geq 0$; fissato t_0, supponiamo ora che $w \not\equiv 0$ su $[a, t_0]$, ovvero che $w(t_1) > 0$ per qualche $t \in (a, t_0)$, e poniamo $\varphi(t) = e^{Lt}w(t)$, dove L è la costante di Lipschitz di ω su $u([a, b]) \cup v([a, b]) \cup w([a, b])$; è una funzione non decrescente, perché

$$\dot{\varphi}(t) = Le^{Lt}w(t) + e^{Lt}\dot{w}(t) = Le^{Lt}w(t) + e^{Lt}(\dot{u}(t) - \dot{v}(t)) \geq$$
$$\geq Le^{Lt}w(t) + e^{Lt}(\omega(t, u(t)) - \omega(t, v(t))) \geq Le^{Lt}w(t) - Le^{Lt}(u(t) - v(t)) = 0$$

dunque

$$e^{Lt_0}w(t_0) \geq e^{Lt_1}w(t_1) \Rightarrow w(t_0) \geq e^{L(t_1 - t_0)}w(t_1) > 0$$

e pertanto $v(t_0) < u(t_0)$. $\square$

Lemma 20 (Nakano)**.**
Sia $X = C_b([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue e limitate, e $S \subset X$ tale che per ogni $f \not\equiv g \in S$ si ha $f < g$ su $[a,b] \times \mathbb{R}$ oppure $f > g$ su $[a,b] \times \mathbb{R}$. Allora, per ogni x_0 fissato, l'insieme $S_0 \subset S$ delle funzioni per cui il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = x_0 \end{cases} \tag{13}$$

ha infinite soluzioni è al più numerabile.

Dimostrazione.
Siano $f \not\equiv g \in S$; a meno di scambiarle, si può supporre $f < g$; per ogni soluzione dei problemi di Cauchy (13) e

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = g(t, y(t)) \\ y(a) = x_0 \end{cases}$$

si ha $x(a) = y(a)$ e

$$\dot{x}(a) = f(a, x_0) < g(a, x_0) = \dot{y}(a)$$

pertanto $x < y$ in $[a, t_1]$, e per il lemma 8, $x < y$ anche su $[t_1, b]$, in particolare $x(b) < y(b)$; dunque, poiché ad ogni coppia (f, g) di elementi di S_0 posso associare un intervallo distinto $(x(b), y(b))$, e $\mathbb{R}$ può contenere al più numerabili intervalli disgiunti, S_0 può essere al più numerabile. □

Teorema 21 (Cafiero)**.**
Sia $F \subset X = C_b([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni per cui il problema di Cauchy (13) ha infinite soluzioni.
Allora, ad ogni misura μ su X σ-finita e priva di atomi si può associare un'altra misura $\overline{\mu}$ tale che $\overline{\mu}(F) = 0$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, scrivendo $g(t,x) = (g(t,x) - g(a,x_0)) + g(a,x_0)$ si ottiene che $X = Y \times \mathbb{R}$, dove

$$Y = \{f \in X : f(a, x_0) = 0\}$$

Poniamo dunque $\overline{\mu} = \mu|_Y \times \mathcal{L}^1$, ove $\mathcal{L}^1$ indica la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$; mostriamo innanzi tutto che F è $\overline{\mu}$-misurabile: lo è perché

$$F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \quad F_k = \left\{ f \in F : \|M_f - m_f\|_\infty \geq \frac{1}{k} \right\}$$

dove M_f e m_f sono rispettivamente la soluzione massimale e minimale del problema di Cauchy (13), e gli F_k sono chiusi: infatti, se $f_k \underset{k \to +\infty}{\to} f$ uniformemente, allora dal teorema di dipendenza continua dai dati iniziali 4 le soluzioni massimali M_{f_k} e minimali m_{f_k} dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f_k(t, x_k(t)) \\ x_k(a) = x_0 \end{cases}$$

convergeranno (a meno di sottosuccessioni) rispettivamente a due soluzioni u, v di (13), e dunque, per ogni $t \in [a,b]$, $M_f(t) - m_f(t) \geq u(t) - v(t) \geq \frac{1}{k}$ cioè $f \in F_k$.
Fissato infine $g \in Y$, l'insieme $g_\lambda := \{g + \lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$ soddisfa le ipotesi del lemma di Nakano 20, dunque ne esistono al più numerabili in F, e pertanto si può concludere, applicando il teorema di Fubini, che $\overline{\mu}(F) = \int_{\{\lambda \in \mathbb{R}: g_\lambda \in F\}} \mu(g_\lambda) d\lambda = 0$

□

Lezione 4 – 25/10/2011

Definizione 2.
Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto e $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^N\right)$.
Il **sistema dinamico** (o flusso) associato al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t)) \\ u(0) = x \end{cases} \tag{14}$$

è la sua unica soluzione $\varphi(x,t) = \varphi^t(x) = t \cdot x$.

Esempio 1.

1. $0 \cdot x = x$
2. Indicando con $J(x) = (t^-(x), t^+(x))$ l'intervallo massimale di esistenza di $t \cdot x$, se $t \in J(x)$ e $s \in J(t \cdot x)$, allora $s \cdot (t \cdot x) = (t+s) \cdot x$.
3. Ponendo $U_t := \{x \in U : t \cdot x \in U\}$, se $U_t \neq \emptyset$ allora $U_{-t} \neq \emptyset$ e $\varphi^{2t} : U_t \to U_{-t}$ è un diffeomorfismo.

Corollario 22.

1. *Per ogni $t \in J(x)$ si ha $J(t \cdot x) = J(x) - t$.*
2. *Per ogni $t \in J(x)$ e $s \in J(t \cdot x)$ si ha $t + s \in J(x)$.*
3. *Per ogni $t \in J(x)$ si ha $-t \in J(t \cdot x)$.*

Proposizione 23.
Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^N\right)$, $t.x$ il flusso associato al problema di Cauchy (14).
Se $s \cdot x = t \cdot x$ per qualche $s < t$, allora $J(x) = \mathbb{R}$ e $\varphi(\cdot, x)$ è periodica con periodo $T := t - s$.

Dimostrazione.
Per le proprietà del flusso,

$$x = -s \cdot (s \cdot x) = -s(t \cdot x) = (t-s) \cdot x = T \cdot x$$

dunque $J(x) = J(T \cdot x) = J(x) - T$ e quindi $J(x) = \mathbb{R}$, e inoltre $(\tau + T) \cdot x = \tau \cdot (T \cdot x) = \tau \cdot x$, cioè $\varphi(\cdot, x)$ è periodica di periodo T. □

Proposizione 24.
Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ *aperto,* $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^N\right)$*,* $t.x$ *il flusso associato al problema di Cauchy (14) e* $0 \neq m, n \in \mathbb{N}$ *tali che* $x = \left(m^{-n}\right) \cdot x$*.*
Allora, $x = \left(m^{-i}\right) \cdot x$ *per ogni* $i = \{1, \ldots, n\}$*.*

Dimostrazione.
$\varphi(\cdot, x)$ è periodica su $J(x) = \mathbb{R}$ con periodo m^{-n}, dunque $x = \left(km^{-n}\right) \cdot x$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, in particolare per $k = m^{n-i}$ si ottiene $x = \left(m^{-i}\right) \cdot x$. $\square$

Definizione 3.
Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $x_0 \in U$ e $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^N\right)$.
Se $f(x_0) \neq 0$, x_0 si dice **punto regolare** per il sistema dinamico associato a (14); se invece $f(x_0) = 0$, x_0 si dice **punto di equilibrio** o **punto critico** per (14).

Teorema 25.
Sia x_0 *un punto regolare per (14),* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N$ *e* ψ *il flusso associato a*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = e_1 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Allora esistono un intorno W *di* x_0*, un intorno* V *di* e_1 *e un diffeomorfismo* $h : W \to V$ *tali che* $h(\psi(t, x)) = \varphi(t, h(x))$*.*

Dimostrazione.
A meno di rinominare le coordinate, si può supporre $x_0 = 0$ e $f(x_0) = e_1$; poste $p(x) = (0, x_2, \ldots, x_N)$ e $h(x) = \varphi(x_1, p(x))$, si ha

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0)x = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0)x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0)p(x) = x_1 e_1 + p(x) = x$$

e dunque h è un diffeomorfismo tra un intorno W di x_0 e un intorno V di e_1, e inoltre

$$h(\psi(t, x)) = h(x + te_1) = \varphi(x_1 + t, p(x)) = \varphi(t, \varphi(x_1, p(x))) = \varphi(t, h(x))$$

$\square$

Proposizione 26.
Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ *aperto,* $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^N\right)$ *e* $\varphi(x, t)$ *il flusso associato al problema di Cauchy (14).*
Un punto $x \in U$ *è di equilibrio se e solo se esiste una successione* $0 \not\equiv t_k \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ *tale che* $t_k \cdot x = x$*.*

Dimostrazione.
Se x è di equilibrio, l'altra condizione è ovviamente valida per ogni successione; viceversa, se è vera la seconda condizione,

$$f(x) = f(\varphi(0, x)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t, x) - \varphi(0, x)}{t} = \lim_{k \to +\infty} \frac{t_k \cdot x - 0 \cdot x}{t_k} = 0$$

$\square$

Proposizione 27.
Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ *aperto,* $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^N\right)$*,* $\varphi(x,t)$ *il flusso associato al problema di Cauchy* (14) *e* $x \in U$ *tale che* $\varphi(\cdot, x)$ *è periodica non costante.*
Allora esiste un periodo minimo

$$T := \inf\{t > 0 : t \cdot x = x\} > 0$$

Dimostrazione.
Se così non fosse, esisterebbe una successione $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ tale che $t_k \cdot x = x$, assurdo per la proposizione 26. □

Proposizione 28.
Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ *aperto,* $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^N\right)$*,* $t.x$ *il flusso associato al problema di Cauchy* (14)*. Allora:*

1. *Se* $\lim_{t\to t^+(x)} t \cdot x = x_0$*, allora* $t^+ = +\infty$ *e* x_0 *è di equilibrio.*

2. *Se* $\varphi(t,x)$ *non è costante ed esiste una successione* $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ *tale che* $\lim_{k\to+\infty} t_k.x = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *tale che* $\lim_{k\to+\infty} t_k \cdot x = x_0$ *per un punto di equilibrio* x_0*, allora* $\alpha = \pm\infty$*.*

Dimostrazione.

1. Se $t^+(x) < +\infty$, allora per la proposizione 2 la soluzione può essere estesa oltre $t^+(x)$, che è assurdo; se poi x_0 non fosse di equilibrio, si avrebbe $c \cdot x_0 \neq x_0$ per qualche c, tuttavia

$$c \cdot x_0 = \lim_{t\to+\infty} c \cdot (t \cdot x) = \lim_{t\to+\infty} (c+t) \cdot x = x_0$$

   che è assurdo.

2. Se fosse $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} t_0 \in \mathbb{R}$, allora $t_0 \cdot x = x_0$, ma ciò implicherebbe

$$x = -t_0 \cdot (t_0 \cdot x) = -t_0 \cdot x_0 = x_0$$

   che è assurdo.

□

Osservazione 9.
Analogamente, se $\lim_{t\to t^-(x)} t \cdot x = x_0$, allora $t^-(x) = -\infty$ e x_0 è di equilibrio.

Definizione 4.
Sia $\varphi(t,x)$ il sistema dinamico associato a (14) e $x \in U$.
Si definisce l'**orbita** si x rispetto a φ come

$$\gamma(x) = \{\varphi(t,x) : t \in J(x)\}$$

Teorema 29.
Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^N\right)$, $\varphi(x,t)$ il flusso associato al problema di Cauchy (14).
Allora, le orbite sono una partizione di U.

Dimostrazione.
Supponiamo che $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ per $x, y \in U$, cioè che esistono $s \in J(x)$ e $t \in J(y)$ tali che $s \cdot x = t \cdot y$; allora, per ogni $\tau \in J(x)$,

$$\tau \cdot x = (\tau - s) \cdot (s \cdot x) = (\tau - s) \cdot (t \cdot y) = (\tau + t - s) \cdot y \in \gamma(y)$$

dunque, $\gamma(x) \subset \gamma(y)$ e analogamente $\gamma(y) \subset \gamma(x)$, dunque le due orbite coincidono. □

Teorema 30.
Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^N\right)$, $\varphi(x,t)$ il flusso associato al problema di Cauchy (14).
Allora, per ogni $x \in U$ vale una e una sola delle seguenti:

1. *$\gamma(x) = \{x\}$.*
2. *$\gamma(x)$ è una curva chiusa.*
3. *$\varphi(\cdot, x)$ è iniettiva.*

Dimostrazione.
Se x è un punto di equilibrio, allora $\gamma(x) = \{x\}$; viceversa, se $\varphi(\cdot, x)$ non è iniettiva, è periodica di periodo T, e in quest'ultimo caso, $\gamma(x) = \{\varphi(t,x) : t \in [0,T)\}$ è una curva chiusa perché $\varphi(0,x) = \varphi(T,x)$. □

Esempio 2 (Modello prede-predatori).
Consideriamo il sistema dinamico associato a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t) - \varepsilon x(t) \\ \dot{y}(t) = cx(t)y(t) - dy(t) - \varepsilon(y) \end{cases}$$

per $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0$ e $a, b, c, d, \varepsilon > 0$, $\varepsilon < a$.
Poiché $\frac{d}{dt}((d+\varepsilon)\log(x(t)) - cx(t) + (a-\varepsilon)\log(y(t)) - by(t)) = 0$, la funzione $(d+\varepsilon)\log x - cx + (a-\varepsilon)\log y - by$ è una costante del moto e dunque le orbite sono contenute nelle sue curve di livello; i punti di equilibrio sono $(0,0)$ e $\left(\frac{d+\varepsilon}{c}, \frac{a-\varepsilon}{b}\right)$, inoltre $\left(e^{(a-\varepsilon)t}, 0\right)$ e $\left(0, e^{-(d+\varepsilon)t}\right)$ sono soluzioni del sistema e hanno per orbite i due semiassi, dunque ogni altra orbita sarà contenuta nel primo quadrante; in realtà, sono tutte orbite periodiche.
Dividiamo il primo quadrante privato del punto di equilibrio $\left(\frac{d+\varepsilon}{c}, \frac{a-\varepsilon}{b}\right)$ nei quattro sottoinsiemi

$$Q_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{d+\varepsilon}{c}, y \geq \frac{a-b}{\varepsilon}\right\}$$

$$Q_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{d+\varepsilon}{c}, y > \frac{a-b}{\varepsilon}\right\}$$

$$Q_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{d+\varepsilon}{c}, 0 < y \leq \frac{a-b}{\varepsilon}\right\}$$

$$Q_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \frac{d+\varepsilon}{c}, 0 < y < \frac{a-b}{\varepsilon}\right\}$$

Se $(x(0), y(0)) \in Q_1$, allora $\dot{x}(t) < 0 \leq \dot{y}(t)$ fintanto che $(x(t), y(t)) \in Q_1$, e dunque la traiettoria raggiungerà la retta verticale di equazione $x = \dfrac{d+\varepsilon}{c}$ in un tempo t_1; dunque, $(x(t_1), y(t_1)) \in Q_2$, ma $\dot{x}(t) \leq 0, \dot{y}(t) < 0$ fintanto che $(x(t), y(t)) \in Q_2$, ma allora la traiettoria raggiungerà la retta orizzontale $y = \dfrac{a-\varepsilon}{b}$ in un tempo t_2, e analogamente tornerà sulla retta verticale in un tempo t_3, su quella orizzontale in un tempo t_4 e nuovamente in quella verticale in un tempo t_5; poiché $x(t_1) = x(t_5) = \dfrac{d+\varepsilon}{c}$, per mostrare la periodicità è sufficiente far vedere che $y(t_1) = y(t_5)$; usando l'esistenza della costante del moto, si trova che

$$(d+\varepsilon)\log(x(t_1)) - cx(t_1) + (a-\varepsilon)\log(y(t_1)) - by(t_1) =$$
$$= (d+\varepsilon)\log(x(t_5)) - cx(t_5) + (a-\varepsilon)\log(y(t_5)) - by(t_5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (d+\varepsilon)\log\frac{d+\varepsilon}{c} - c\frac{d+\varepsilon}{c} + (a-\varepsilon)\log(y(t_1)) - by(t_1) =$$
$$= (d+\varepsilon)\log\frac{d+\varepsilon}{c} - c\frac{d+\varepsilon}{c} + (a-\varepsilon)\log(y(t_5)) - by(t_5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a-\varepsilon)\log(y(t_1)) - by(t_1) = (a-\varepsilon)\log(y(t_5)) - by(t_5)$$

ma da quest'ultima affermazione segue che $y(t_1) = y(t_5)$, perché la funzione $z \to (a-\varepsilon)\log z - bz$ è decrescente per $z > \dfrac{a-\varepsilon}{b}$.
Si può osservare inoltre che, se T è il periodo minimo di una soluzione,

$$0 = \log(x(t))|_{t=0}^{T} = \int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}dt = \int_0^T (a-\varepsilon+by(t))dt = (a-\varepsilon)T + b\int_0^T y(t)dt$$

e dunque $\displaystyle\int_0^T y = \frac{a-\varepsilon}{b}T$, e analogamente $\displaystyle\int_0^T y = \frac{d+\varepsilon}{c}T$, quindi x decresce in media e y cresce in media quando $\varepsilon \to 0$.

Lezione 5 – 8/11/2011

Definizione 5.
Sia $\varphi(t,x) = t \cdot x$ il flusso associato al problema di Cauchy (14) e $x \in U$ tale che

$J(x) = \mathbb{R}$.
Si definisce l'insieme **α-limite** di x come

$$\alpha(x) = \left\{ y \in U : \exists t_k \underset{k \to +\infty}{\searrow} -\infty \text{ tale che } t_k \cdot x \underset{k \to +\infty}{\to} y \right\}$$

e l'**insieme ω-limite** di x come

$$\omega(x) = \left\{ y \in U : \exists t_k \underset{k \to +\infty}{\nearrow} +\infty \text{ tale che } t_k \cdot x \underset{k \to +\infty}{\to} y \right\}$$

Esempio 3.

1. Se $\dot{x} = 0$, allora $t \cdot x = x$ e dunque $\alpha(x) = \omega(x) = \{x\}$.
2. Se $\dot{x} = 1$, allora $t \cdot x = t + x$ e dunque $\alpha(x) = \omega(x) = \emptyset$.
3. Se $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ e $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, allora $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ e dunque $\alpha((0,1)) = \omega((0,1)) = \gamma((0,1)) = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \big\}$.

Definizione 6.
Sia $B \subset U$ aperto e $f \in C^1\left(B, \mathbb{R}^N\right)$.
Una funzione $V \in C^1(B, \mathbb{R})$ si dice **funzione di Ljapunov** per f se $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ per ogni $x \in B$.
Se inoltre $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$ per ogni $x \in B$, f si dice **funzione di Ljapunov stretta**.

Osservazione 10.
Se V è una funzione di Ljapunov per f e $t \cdot x$ è il flusso associato a f, allora

$$\frac{d}{dt} V(t \cdot x) = \langle \nabla V(t \cdot x), f(x) \rangle|_{t=0} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$$

dunque V decresce lungo le soluzioni del problema di Cauchy associato.

Esempio 4.

1. In un sistema gradiente del tipo $\dot{x} = -\nabla V(x)$, V è una funzione di Ljapunov.
2. In un sistema hamiltoniano del tipo $\begin{cases} \dot{x} = H_y(x,y) \\ \dot{y} = -H_x(x,y) \end{cases}$, H è una funzione di Ljapunov.
3. In un sistema lineare del tipo $\dot{u} = Au$, $V(x) = \displaystyle\int_0^\infty \|s \cdot x\|^2 ds$ è una funzione di Ljapunov.
4. In un sistema del tipo $\ddot{u} + f(u, \dot{u})$ tale che $\langle h(x,y) - h(x,0), y \rangle \geq 0$ in un intorno dell'origine, $V(x) = \dfrac{y^2}{2} + \displaystyle\int_0^x h(s,0) ds$ è una funzione di Ljapunov.

Definizione 7.
Un insieme $A \subset U$ si dice **positivamente invariante** per il flusso φ se per ogni $x \in A$ si ha $\gamma^+(x) \subset A$. Un insieme $A \subset U$ si dice **negativamente invariante** se per ogni $x \in A$ si ha $\gamma^-(x) \subset A$. Un insieme $A \subset U$ si dice **invariante** se è positivamente invariante e negativamente invariante, cioè se per ogni $x \in A$ si ha $\gamma(x) \subset A$.

Osservazione 11.
Se φ è il flusso associato a f e ψ è il flusso associato a $-f$, allora $\psi(t,x) = \varphi(-t,x)$, dunque A è positivamente invariante per ψ se e solo se è negativamente invariante per φ e viceversa.
Analogamente, per ogni $x \in U$ l'insieme $\omega(x)$ rispetto al flusso φ coincide con l'insieme $\alpha(x)$ rispetto a ψ e viceversa.

Teorema 31.
Sia $x \in U$ tale che $J(x) = \mathbb{R}$. Allora:

1. *$\omega(x) \neq \emptyset$ se e solo se esiste una successione $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ tale che $\{t_k \cdot x : k \in \mathbb{N}\} \Subset U$.*
2. *$\omega(x)$ è invariante.*
3. *$\omega(x)$ è chiuso in U.*
4. *Se $\emptyset \neq \omega(x)$ è compatto, allora è connesso e $\lim_{t\to+\infty} t \cdot x = \omega(x)$.*
5. *$\omega(x) = \{y\}$ se e solo se $\lim_{t\to+\infty} t \cdot x = y$.*
6. *Se $\gamma^+(x) \Subset U$, allora $\emptyset \neq \omega(x)$ è compatto, connesso e $\lim_{t\to+\infty} t \cdot x = \omega(x)$.*

Dimostrazione.

1. Se $\emptyset \neq \omega(x) \ni y$, allora esiste una successione $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ tale che $t_k \cdot x \underset{k\to+\infty}{\to} y$, dunque $\{t_k \cdot x : k \in \mathbb{N}\} \subset \{t_k \cdot x : k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\} \Subset U$; viceversa, se $\{t_k \cdot x : k \in \mathbb{N}\} \Subset U$, a meno di estratte si avrà $t_k \cdot x \underset{k\to+\infty}{\to} y \in U$ e dunque $y \in \omega(x) \neq \emptyset$.

2. Se $y \in \omega(x)$ e $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ è tale che $t_k \cdot x \underset{k\to+\infty}{\to} y$, allora per ogni $t \in J(y)$
$$(t + t_k) \cdot x = t \cdot (t_k \cdot x) \underset{k\to+\infty}{\to} t \cdot y$$
dunque, poichè $t + t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$, si avrà $t \cdot y \in \omega(x)$, ma essendo t arbitrario si ha anche $\gamma(y) \subset \omega(x)$, cioè $\omega(x)$ è invariante.

3. Se $\omega(x) \ni y_k \underset{k\to+\infty}{\to} y \in U$, a meno di estratte si avrà $\|y - y_k\| \leq \frac{1}{k}$; inoltre, esiste una successione $t_{k,j} \underset{j\to+\infty}{\to} +\infty$ tale che $t_{k,j} \cdot x \underset{j\to+\infty}{\to} y_k$, dunque a meno di estratte $\|t_{k,j} \cdot x - y_k\| \leq \frac{1}{j}$; dunque,
$$\|t_{k,k} \cdot x - y\| \leq \|t_{k,k} \cdot x - y_k\| + \|y_k - y\| \leq \frac{2}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

e cioè $y \in \omega(x)$.

4. Se per assurdo $t \cdot x \underset{t\to+\infty}{\not\to} \omega(x)$, esisterebbe un aperto W tale che $\omega(x) \subset W \Subset U$ e $t_k \cdot x \notin \overline{W}$ per un'opportuna successione $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$; dunque, l'insieme $E_k = \{t \cdot x : t \geq t_k\}$ contiene, per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia punti di W che punti di $U \backslash W$; per la connessione di E_k, esisterà una successione $s_k \geq t_k$ tale che $s_k \cdot x \in \partial W$, ma essendo ∂W compatto, a meno di estratte si avrà $s_k \cdot x \underset{k\to+\infty}{\to} z \in \partial W \cap \omega(x)$, che è assurdo perché $\omega(x) \subset W$ che è aperto.
   Se per assurdo $\omega(x)$ non fosse connesso, esisterebbero due aperti disgiunti W_1, W_2 tali che $\omega(x) \subset W_1 \cup W_2$ e $\omega(x) \cap W_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$; poiché $t \cdot x \underset{t\to+\infty}{\to} \omega(x)$, allora $A = \{t \cdot x : t \geq t_0\} \subset W_1 \cup W_2$ per t_0 opportuno; essendo poi $\omega(x) \cap W_i \neq \emptyset$, allora esisteranno due successioni $t_{i,k} \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ tali che $t_{i,k} \cdot x \in W_i \cap A$, ma allora $A = (A \cap W_1) \cup (A \cap W_2)$ con $A \cap W_1 \neq \emptyset \neq A \cap W_2$, che è assurdo per la connessione di A.

5. Se $\lim\limits_{t\to+\infty} t \cdot x = y$, allora per ogni successione $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ si ha $t_k \cdot x \underset{k\to+\infty}{\to} y$, dunque $\omega(x) = \{y\}$; viceversa, se $\omega(x) = \{y\} \neq \emptyset$ è compatto, allora $\lim\limits_{t\to+\infty} t \cdot x = \omega(x) = \{y\}$.

6. Se $\gamma^+(x) \Subset U$, allora esiste una successione $\gamma^+(x) \ni y_k = t_k \cdot x \underset{k\to+\infty}{\to} y \in U$ e dunque $\emptyset \neq \omega(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$, che quindi è anche compatto e perciò $\lim\limits_{t\to+\infty} t \cdot x = \omega(x)$.

□

Teorema 32 (Criteri di invarianza)**.**
Sia $A \subset U$ chiuso.
Allora le tre condizioni seguenti si equivalgono:

1. *A è positivamente invariante.*

2. *Per ogni $x \in \partial_U A$ si ha $\liminf\limits_{h\to 0} \dfrac{d(x + hf(x), A)}{h} = 0$.*

3. *Per ogni $x \in \partial_U A$ esiste un $\delta_x > 0$ tale che $t \cdot x \in A$ per $t \in [0, \delta_x]$.*

Dimostrazione.

$1 \Rightarrow 2$ Poiché $f(x) = \dfrac{d}{dt} t \cdot x|_{t=0}$, allora $h \cdot x = x + hf(x) + o(h)$ e dunque

$$\left| \frac{d(x + hf(x), A)}{h} \right| \leq \frac{\|x + hf(x) - h \cdot x\|}{h} \leq \frac{o(h)}{h} \underset{h\to 0}{\to} 0$$

$2 \Rightarrow 3$ Fissato $x \in \partial_U A$ e $R > 0$ tale che $\overline{B_{2R}(x)} \subset U$, la funzione $v(t) := d(t \cdot x, A)$ è localmente Lipschitziana, dunque derivabile q.o., dunque prendendo δ_x in modo tale che $v([0, \delta_x]) \subset \overline{B_{2R}(x)}$, $\dot{v}$ esisterà in qualche $t \in [0, \delta_x]$; se poi p_t è il punto di $A \cap \overline{B_{2R}(x)}$ che dista meno da $t \cdot x$, allora per ogni $h > 0$ si ha

$$v(t+h) = d((t+h)\cdot x, A) \leq \|(t+h)\cdot x - p_t - hf(p_t)\| + d(p_t + hf(p_t), A) =$$
$$= \|t \cdot x + f(t \cdot x)h + o(h) - p_t - hf(p_t)\| + d(p_t + hf(p_t), A) \leq$$
$$\leq \|t \cdot x - p_t\| + h\|f(t \cdot x) - f(p_t)\| + o(h) + d(p_t + hf(p_t), A) \leq$$
$$\leq (1 + Lh)\|t \cdot x - p_t\| + o(h) + d(p_t + hf(p_t), A) \leq$$
$$\leq (1 + Lh)v(t) + o(h) + d(p_t + hf(p_t), A)$$

dunque

$$\dot{v}(t) = \liminf_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \leq$$
$$\leq \liminf_{h \to 0} Lv(t) + \frac{o(h)}{h} + \frac{d(p_t + hf(p_t), A)}{h} = Lv(t)$$

Poiché questo vale per q.o. $t \in [0, \delta_x]$ e $v \geq 0 = v(0)$, per il teorema 9 si avrà $v \leq u$, dove u è la soluzione di $\begin{cases} \dot{u} = Lu \\ u(0) = 0 \end{cases}$ che è $u \equiv 0$, dunque $d(t \cdot x, A) = v(t) \equiv 0$ e cioè $t \cdot x \in A$.

$3 \Rightarrow 1$ Se per assurdo $t \cdot x \notin A$ per qualche $t > 0$, allora posti $B := \{t > 0 : t \cdot x \notin A\}$ e $t_0 := \inf B$ si ha $t \cdot (t_0 \cdot x) \in A$ per $t \in [0, \delta_{t_0 \cdot x}]$ e dunque $t + t_0 \notin B$ per questi t, ma allora $[t_0, t_0 + \delta_{t_0 \cdot x}] \notin B$, che è assurdo.

□

Teorema 33 (Principio di La Salle)**.**
Sia $x \in U$ e $V \in C^1(U, \mathbb{R})$.
Se V è una funzione di Ljapunov su $\gamma^+(x)$, allora $\omega(x) \subset \{y \in U : \dot{V}(y) = 0\}$.
Se V è una funzione di Ljapunov su $\gamma^-(x)$, allora $\alpha(x) \subset \{y \in U : \dot{V}(y) = 0\}$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, essendo $t \to V(t, x)$ decrescente, esisterà $l := \lim_{t \to +\infty} V(t \cdot x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; se poi $y \in \omega(x)$ e $t_k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$ è tale che $t_k \cdot x \underset{k \to +\infty}{\to} y$, allora $V(y) = \lim_{k \to +\infty} V(t_k \cdot x) = l$ e dunque V è costante su $\omega(x)$; infine, poiché $\omega(x)$ è positivamente invariante, anche $V(t \cdot y)$ è costante in y ad ogni t fissato, dunque $\dot{V}(y) = \frac{d}{dt} V(t \cdot y)|_{t=0} = 0$; la seconda affermazione si dimostra in maniera analoga. □

Esempio 5.

1. In un sistema gradiente del tipo $\dot{x} = -\nabla V(x)$, V è una funzione di Ljapunov con $\dot{V} = -\|\nabla V\|^2$ e dunque, se i punti critici di V sono isolati, $\omega(x)$ è costituito da uno solo di questi punti, perché gli ω-limite compatti sono connessi.

2. Nel sistema $\dot{x} = -\nabla V(x)$ non ci sono orbite chiuse, perché se così fosse
$$\gamma(x) = \omega(x) \subset \{x \in U : \dot{V}(x) = 0\} = \{\text{punti di equilibrio}\}$$
3. Nel sistema $\begin{cases} \dot{x} = y + x\left(1 - x^2 - y^2\right) \\ \dot{y} = -x + y\left(1 - x^2 - y^2\right) \end{cases}$, una soluzione è data da $(x(t), y(t)) = (\sin t, \cos t)$, dunque $S := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ è un'orbita; inoltre, $V(x, y) = x^2 + y^2$ è una funzione di Ljapunov in $B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$ e $-V$ lo è in $A := (B \cup S)^c$ mentre $\dot{V} = 0$ in S e in 0; pertanto, se $x \in B$ si ha $\alpha(x) = \{0\}$ e $\omega(x) = S$, mentre se $x \in A$ si ha $\omega(x) = S$ e $\alpha(x) = \emptyset$.

Lezione 6 – 15/11/2011

Definizione 8.
Sia $\varphi(t, x) = t \cdot x$ il flusso associato a (14) e x_0 un suo punto di equilibrio.
x_0 si dice **stabile** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x - x_0\| \le \delta$ allora $\|t \cdot x - x_0\| \le \varepsilon$.
Se inoltre esiste un intorno W di x_0 tale che $t \cdot x \underset{k \to +\infty}{\to} x_0$ per ogni $x \in W$, x_0 si dice **asintoticamente stabile**.

Teorema 34 (Ljapunov)**.**
Sia x_0 un punto di equilibrio per il problema di Cauchy (14), W un intorno di x_0 e $V : W \to \mathbb{R}$ continua tale che $V(x_0) < V(x)$ per ogni $x \in W \setminus \{0\}$. Allora

1. *Se $V(t \cdot x) \le V(s \cdot x)$ per ogni $t \ge s$ allora x_0 è stabile.*
2. *Se $V(t \cdot x) \not\equiv C$ per ogni $x \neq x_0$ allora x_0 è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione.

1. Se $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset W$ allora $\min\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} V =: m < V(x_0)$, dunque essendo V continua esiste $\delta > 0$ tale che $V(x) < m$ se $\|x - x_0\| \le \delta$; in particolare se questo è vero deve valere anche $\|t \cdot x - x_0\| \le \varepsilon$, perché altrimenti $t_0 \cdot x \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ per qualche $t_0 > 0$, e dunque $m \le V(t_0 \cdot x) \le V(0 \cdot x) = V(x) < m$, che è assurdo; dunque, x_0 è stabile.
2. Essendo x_0 stabile, per $\varepsilon, \delta > 0$ opportuni si ha $\gamma^+(x) \subset \overline{B_\varepsilon(x_0)} \Subset U$ per $\|x - x_0\| \le \delta$, dunque per il teorema 31 l'insieme $\emptyset \neq \omega(x)$ è compatto e $\lim\limits_{t \to +\infty} t \cdot x = \omega(x)$; inoltre, essendo V decrescente lungo le traiettorie, deve esistere il limite $l = \lim\limits_{t \to +\infty} V(t \cdot x)$ e, per la continuità di V, se $y \in \omega(x)$ e $t_k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$ è tale che $t_k \cdot x \underset{k \to +\infty}{\to} y$, allora $l = \lim\limits_{k \to +\infty} V(t_k \cdot x) = V(y)$; infine, essendo $\omega(x)$ invariante, si ha $V(t \cdot y) = l$ per ogni $t \ge 0$, ma V non può essere costante lungo le traiettorie, dunque $y = x_0$ e cioè $t \cdot x \underset{t \to +\infty}{\to} x_0$, cioè x_0 è asintoticamente stabile.

□

Esempio 6.

1. Per il problema di Cauchy $\dot{x} = 0$ la soluzione è $t \cdot x \equiv x$, dunque tutti i punti sono stabili ma non asintoticamente stabili.

2. Per il problema di Cauchy $\dot{x} = -x$ la soluzione è $t \cdot x = xe^{-t}$, dunque l'unico punto di equilibrio $x = 0$ è asintoticamente stabile.

3. Per il problema di Cauchy $\dot{x} = x$ la soluzione è $t \cdot x = xe^{t}$, dunque l'unico punto di equilibrio $x = 0$ non è stabile.

Corollario 35.
Sia x_0 un punto di equilibrio per il problema di Cauchy (14) tale che tutti gli autovalori di $f'(x_0)$ hanno parte intera negativa.
Allora x_0 è asintoticamente stabile.

Dimostrazione.
Indicando con $\psi(t, x)$ il flusso associato all'equazione lineare $\begin{cases} \dot{u} = f'(x_0)u \\ u(0) = x \end{cases}$, la funzione $W(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \|\psi(\cdot, x - x_0)\|^2$ è di Ljapunov perché

$$\dot{W}(x) = \langle \nabla W(x), f(x)\rangle = \langle \nabla W(x), f'(x_0)\rangle + \langle \nabla W(x), o(\|x - x_0\|)\rangle \leq$$

$$\leq -\|x - x_0\|^2 + L\|x - x_0\|\|o(x - x_0)\| = \|x - x_0\|^2 \left(-1 + L\frac{o(\|x - x_0\|)}{\|x - x_0\|}\right)$$

che è negativo se $\|x - x_0\|$ è abbastanza piccolo. □

Proposizione 36.
Sia $V \in C^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ tale che ∇V è Lipschitz e $\dot{x} = -\nabla V(x)$ un sistema gradiente. Allora

1. *I punti di minimo locale isolati di V sono stabili.*

2. *Un punto di equilibrio x_0 isolato è stabile se e solo se è asintoticamente stabile se e solo se è di minimo locale stretto.*

Dimostrazione.

1. Segue dal fatto che V è una funzione di Ljapunov.

2. Se un punto di equilibrio x_0 è di minimo locale stretto per V, allora $\dot{V} < 0$ in $U \setminus \{x_0\}$, dunque x_0 è asintoticamente stabile.
   Viceversa, se x_0 è stabile e $\varepsilon, \delta > 0$ sono tali che $\gamma^+(x) \subset \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ per ogni $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$, allora $\emptyset \neq \omega(x) \subset \overline{B_\varepsilon(x_0)}$; inoltre, a meno di rimpicciolire ε, si può supporre $\nabla V \neq 0$ su $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \setminus \{x_0\}$, ma per il principio di Lasalle 33 dev'essere $\omega(x) \subset \{x \in U : \dot{v}(x) = 0\} \cap \overline{B_\varepsilon(x_0)} = \{x_0\}$, dunque $\omega(x) = \{x_0\}$ e cioè x_0 è asintoticamente stabile; infine, poiché V decresce lungo le

traiettorie, se x_0 è asintoticamente stabile, per ogni $x \in \overline{B_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}$ si ha

$$V(x_0) = \lim_{t \to +\infty} V(t \cdot x) < V(0 \cdot x) = V(x)$$

cioè x_0 è di minimo stretto.

$\square$

Esempio 7.

1. In un sistema hamiltoniano del tipo $\begin{cases} \dot{x} = H_y(x, y) \\ \dot{y} = -H_x(x, y) \end{cases}$ per $H \in C^1\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ non costante in nessun aperto, i punti di minimo (oppure di massimo) locale sono stabili, come si può vedere verificando che H (oppure $-H$) è una funzione di Ljapunov, tuttavia non ci sono punti asintoticamente stabili: infatti, se x_0 fosse un punto asintoticamente stabile e W è un suo intorno tale che $t \cdot x \underset{t \to +\infty}{\to} x_0$ per ogni $x \in W$, allora essendo H una costante del moto, per ogni $x \in W$ si avrebbe

$$H(z) = H(0 \cdot z) = H(t \cdot z) \underset{t \to +\infty}{\to} H(x_0)$$

che è assurdo perché H non può essere costante su W.

2. Se $|\varphi^t(A)| = |A|$ per ogni $A \subset U$, allora non esistono punti asintoticamente stabili.

Definizione 9.
Sia x_0 un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
Il **bacino di attrazione** di x_0 è l'insieme $B(x_0) = \left\{ x \in U : t \cdot x \underset{k \to +\infty}{\to} x_0 \right\}$

Proposizione 37.
Sia x_0 un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
Allora il suo bacino di attrazione $B(x_0)$ è aperto.

Dimostrazione.
Se N è un intorno di x_0 tale che $t \cdot x \underset{t \to +\infty}{\to} x_0$ per ogni $x \in N$, allora per ogni $y \in N$ esiste t_0 tale che $t \cdot y \in N$ per ogni $t \geq t_0$, dunque in particolare $t \cdot (t_0 \cdot y) \underset{t \to +\infty}{\to} x$; inoltre, per la continuità del flusso, esiste un intorno W di y tale che $t_0 \cdot z \in N$ per ogni $z \in W$, dunque $\lim_{t \to +\infty} t \cdot z = \lim_{t \to +\infty} (t - t_0) \cdot (t_0 \cdot z) = x_0$ e cioè $z \in B(x_0)$; pertanto, per l'arbitrarietà di y, $B(x_0)$ è aperto. $\square$

Proposizione 38.
Sia $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^N$ una matrice simmetrica localmente Lipschitz tale che $a_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 0$.
Allora $x_0 = 0$ è stabile ma non asintoticamente stabile per il sistema $\dot{x} = A(x)x$.

Dimostrazione.
Se $J \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $r \in C^1(J, \mathbb{R})$ è convessa, mostriamo che $\sum_{i=1^N} r(x_i)$ è una funzione di Ljapunov:

$$
\begin{aligned}
2\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} r(x_i) + \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} r(x_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} r'(x_i)\dot{x_i} + \sum_{j=1}^{N} r'(x_j)\dot{x_j} = \\
&= \sum_{i=1}^{N} r'(x_i)\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)x_j + \sum_{j=1}^{N} r'(x_j)\sum_{i=1}^{N} a_{ji}(x)x_i = \\
&= \sum_{i=1}^{N} r'(x_i)\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)x_j + \sum_{j=1}^{N} r'(x_j)\sum_{i=1}^{N} a_{ji}(x)x_i - \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} r'(x_i)a_{ij}x_i - \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} r'(x_j)a_{ji}x_j = \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)(x_j - x_i)(r'(x_i) - r'(x_j)) \le 0
\end{aligned}
$$

In particolare, prendendo $r(s) = s^2$ (e dunque $V(x) = \|x\|^2$), si ottiene la stabilità dell'origine.
Tuttavia, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ è una costante del moto, perché

$$
\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N}\dot{x_i} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)x_j = \sum_{j=1}^{N} x_j \sum_{i=1}^{N} a_{ij}(x) = 0
$$

dunque, ponendo $\widetilde{u} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i, \ldots, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i\right)$ per ogni $u \in \mathbb{R}^N$, si ottiene che

$$
\begin{aligned}
V\left(\widetilde{x}(0)\right) &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j(0)\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j(t)\right)^2 \le \\
&\le \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j(t)^2 = V(x(t))
\end{aligned}
$$

pertanto, 0 non può essere asintoticamente stabile perché per ogni punto x_0 con componenti positive si ha $V(t \cdot x_0) \ge V(\widetilde{x_0}) = \|\widetilde{x_0}\|^2 > 0$ e dunque non può accadere $t \cdot x_0 \underset{t \to +\infty}{\to} 0$, perché implicherebbe $V(t \cdot x_0) \underset{t \to +\infty}{\to} V(0) = V\left(\widetilde{0}\right) = 0$. $\square$

Lezione 7 – 22/11/2011

Definizione 10.
Siano $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, $P, Q \in C^1(U, \mathbb{R})$ e sia φ il sistema dinamico associato al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = P(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = Q(x(t), y(t)) \\ x(0) = x \\ y(0) = y \end{cases} \tag{15}$$

Una **sezione locale** (o **trasversale**) per φ è un segmento S contenuto in una retta L tale che:

1. S non contiene punti di equilibrio.
2. S non è tangente ad alcuna orbita.
3. S è aperto in L.

Osservazione 12.
Se u è un punto regolare per il sistema (15), esistono infinite sezioni locali che lo contengono, perché se $(P(u), Q(u)) \neq (0, 0)$ allora esistono infinite coppie (a, b) tali che $aP(u) + bQ(u) \neq 0$.

Proposizione 39.
Sia S una sezione locale. Allora:

1. *Per ogni $u \in U$ e $t_1 < t_2 \in J(u)$, l'insieme $\{t \cdot u : t_1 \leq t \leq t_2\} \cap S$ è finito.*
2. *Per ogni $u \in U$ l'insieme $A = \{t \cdot u :\in (t^-(u), t^+(u))\} \cap S$ è al più numerabile, e può essere ordinato per grandezza in modo tale che se $A = \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, allora $(t_k, t_{k+1}) \cap S = \emptyset$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.*
3. *Tutte le orbite che intersecano S lo fanno sempre nello stesso verso.*

Dimostrazione.

1. Se per assurdo esistesse una successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [t_1, t_2]$, allora a meno di estratte $t_k \underset{k \to +\infty}{\to} t_0$, e quindi $t_k \cdot u \underset{k \to +\infty}{\to} t \cdot u$; ma allora $\dfrac{t_k \cdot u - t_0 \cdot u}{t_k - t_0}$ è un vettore parallelo a L che tende a $\dfrac{d}{dt}\varphi(t_0, u)$, che invece non può essere parallelo a $S \subset L$ per definizione di sezione locale.
2. Se $s_k \underset{k \to +\infty}{\searrow} t^-(u)$ e $t_k \underset{k \to +\infty}{\nearrow} t^+(u)$, allora $A \cap [s_k, t_k]$ è finito per il punto precedente, e dunque $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap [s_k, t_k])$ è al più numerabile ed è ordinato in maniera crescente.

3. Se $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$, allora l'insieme dei punti le cui orbite attraversano φ da sinistra a destra si può scrivere come

$$S^+ = \{u \in S : aP(u) + bQ(u) > 0\}$$

mentre l'insieme dei punti le cui orbite vanno da destra a sinistra è

$$S^- = \{u \in S : aP(u) + bQ(u) < 0\}$$

Dunque, S^+ e S^- sono due aperti disgiunti che ricoprono S, che è connesso, e dunque uno dei due deve essere vuoto, cioè tutte le orbite vanno nello stesso verso.

□

Lemma 40 (Mappa di Poincaré)**.**
Sia S una sezione locale e $u_0 = \varphi(t_0, z_0) \in S$.
Allora esiste un intorno W di z_0 e $\tau \in C^1(W, \mathbb{R})$ tale che $\tau(z_0) = t_0$ e $\varphi(\tau(u), u) \in S$.

Dimostrazione.
Se $S \subset L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$ e $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, la mappa $F(t, u) = a\varphi_1(t, u) + b\varphi_2(t, u)$ si annulla se e solo se $\varphi(t, (x, y)) \in L$; inoltre, $F(t_0, u_0) = 0$ perché $u_0 \in S \subset L$ e $\left.\dfrac{d}{dt}F(t, u)\right|_{t=0} = aP(0, u) + bQ(0, u) \neq 0$, e dunque dal teorema della funzione implicita segue l'esistenza dell'intorno W di z_0 e della mappa $\tau \in C^1(W, \mathbb{R})$ tale che $F(\tau(u), u) = 0$. □

Definizione 11.
La mappa τ definita nel lemma 40 è detta **mappa di Poincaré**.

Osservazione 13.
La mappa di Poincaré τ gode delle seguenti proprietà:

1. Essendo continua, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno W_ε di z_0 tale che $|t_0 - \tau(u)| \leq \varepsilon$ e $\|u_0 - \varphi(\tau(u), u)\| \leq \varepsilon$ per ogni $u \in W_\varepsilon$.

2. Esiste un intervallo aperto $J \ni t_0$ tale che per ogni $t \in J, u \in W$ con $\varphi(t, u) \in S$ si ha $t = \tau(u)$.

3. Prendendo $z_0 = u_0$ e $t_0 = 0$ si ottiene che $\tau(u) = 0$ per ogni $u \in S \cap W$.

4. La mappa $g(u) = \varphi(\tau(u), u)$ è continua da W a S e coincide con l'identità su $W \cap S$.

Definizione 12.
Sia $u \in U$, t_k una successione in $J(u)$ e $u_k = \varphi(t_k, u)$.
u_k è **monotona** lungo $\gamma(u)$ se t_k è monotona.

Definizione 13.
Siano S una sezione locale, $v, w \in S$ e $[v, w] = \{tv + (1 - t)w : t \in [0, 1]\}$ e v_k una successione in S.
v_k è **monotona** lungo S se $v_k \in [v_{k-1}, v_{k+1}]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 41 (Conservazione dell'ordine)**.**
Sia $u_k = \varphi(t_k, u)$ una successione di punti in $\gamma(u) \cap S$.
Allora, u_k è monotona lungo $\gamma(u)$ se e solo se lo è lungo S.

Dimostrazione.
È sufficiente mostrare che, presi comunque $t_1 < t_2 < t_3$ e $v_i = t_i \cdot u$, si ha $v_2 \in [v_1, v_3]$; inoltre, grazie alla seconda affermazione della proposizione 39, si può sempre supporre, a meno di suddividere nuovamente la partizione, che $t \cdot u \notin S$ per $t \in (t_1, t_2) \cup (t_2, t_3)$; chiamando A la regione interna alla curva $\{t \cdot u; t \in (t_1, t_2)\} \sqcup [v_1, v_2]$ ottenuta unendo l'orbita di $\gamma(u)$ tra t_1 e t_2 e il segmento tra v_1, supponendo che $\gamma(u)$ attraversi $[v_1, v_2]$ verso A, si ha $t \cdot u \in A$ per $t \geq t_2$, dunque se $v_3 \in [v_1, v_2]$ l'orbita attraverserà nuovamente il segmento puntando verso l'esterno, contradicendo la terza affermazione della proposizione 39,e inoltre $v_1 \notin [v_2, v_2]$ perché v_3 non può attraversare S fuori da A, e quindi dev'essere $v_2 \in [v_1, v_3]$; si ragiona analogamente se il verso di percorrenza è opposto. □

Lemma 42 (Intersezione)**.**
Sia $u_0 \in U$ e $\omega(u_0)$ il suo insieme ω-limite.
Allora $\omega(u_0) \cap S$ è vuoto oppure contiene un solo punto.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, se $u \in S \cap \omega(u_0)$ allora esiste $t_k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$ tale che $S \ni t_k \cdot u_0 \underset{k \to +\infty}{\to} u$; infatti, se $s_k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$ è tale che $s_k \cdot u_0 \underset{k \to +\infty}{\to} u$, allora per il lemma della mappa di Poincaré 40 esiste un aperto $W \ni u$ e $\tau \in C^1(W, \mathbb{R})$ tale che $\varphi(\tau(v), v) \in W$ per ogni $v \in W$, e inoltre, a meno di restringere W, τ è limitata e dunque $t_k = s_k + \tau(s_k \cdot u) \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$ e

$$\varphi(t_k \cdot u) = \underbrace{\varphi(\tau(s_k \cdot u_0), s_k \cdot u_0)}_{\in S} \underset{k \to +\infty}{\to} \varphi(\tau(u), u) = u$$

Supponiamo $S \cap \omega(u_0) \neq \emptyset$: se $u, v \in S$, esistono $s_k, t_k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$ tali che $S \ni t_k \cdot u_0 \underset{k \to +\infty}{\to} u$ e $S \ni s_k \cdot u_0 \underset{k \to +\infty}{\to} v$, ma la successione formata unendo s_k e t_k è monotona lungo $\gamma(u)$ e perciò, per il lemma di conservazione dell'ordine 41, anche lungo S e dunque ammette limite, cioè $u = v$. □

Osservazione 14.
Il lemma di intersezione 42 vale anche per $\alpha(u_0)$.

Corollario 43.
L'intersezione tra un'orbita chiusa e una sezione locale è vuota oppure contiene un solo punto

Dimostrazione.
Segue dal lemma 42 e dal fatto che ogni orbita chiusa coincide con il suo ω-limite. □

Corollario 44.
Detto E l'insieme dei punti di equilibrio del sistema (15)*, le componenti connesse di $\omega(u)\backslash E$ e di $\alpha(u)\backslash E$ sono orbite del sistema per ogni $u \in U$.*

Dimostrazione.
È sufficiente mostrare il risultato per $\omega(u)\backslash E$: presa una sua componente connessa $K \ni u_0$, $\gamma(u) \subset K$, e se per assurdo fosse $\gamma(u) \subsetneq K$, allora esisterebbe $v \in \partial_K \gamma(u)$; se $v \in \gamma(u_0)$, si può prendere una sezione locale S contenente v, un intorno aperto W di v e una mappa di Poincaré τ; essendo $v \in \partial_K \gamma(u_0)$, allora $\emptyset \neq W \cap (K\backslash\gamma(u_0)) \ni w$ e dunque è ben definito $\tau(w) \cdot w \in S$, ma $\gamma(w) \cap \gamma(u_0) = \emptyset$ e quindi $\tau(w) \cdot w \neq v$, ma $\tau(w) \cdot w, v \in \omega(u) \cap S$, e questo è assurdo perché contraddice il lemma di intersezione 42; se invece $v \notin \gamma(u_0)$, si ragiona allo stesso modo prendendo $W \cap (K\backslash \cap \gamma(u_0))$ invece che $W \cap (K\backslash\gamma(u_0))$. □

Teorema 45.
Sia $u \in U$ e E l'insieme dei punti di equilibrio del sistema (15)*.*
Allora $\omega(u)\backslash E$ è unione di al più numerabili orbite.
Se inoltre $u_0 \in \omega(u)\backslash E$ e $\gamma(u_0)$ non è periodica, $\omega(u_0)$ può contenere solo punti di equilibrio.

Dimostrazione.
Per il corollario 44, $\omega(u)$ è unione di orbite, dunque basta far vedere che queste sono al più numerabili; preso un punto u_K in ogni orbita K, consideriamo una sezione locale S che lo attraversa, un aperto $W_K \ni u_K$ e una mappa di Poincaré $\tau : W_K \to \mathbb{R}$: dev'essere $W_K \cap \omega(u) \subset K$, perché se esistesse $v \in W_K \cap \omega(u)\backslash K$, allora $\gamma(v) \subset \omega(u)\backslash K$, dunque preso $v_s \in \gamma(v) \cap S$, si ha $v_s \neq u_K$ e $\{v_s, u_K\} \subset \omega(u) \cap S$, che è assurdo perché contraddice il lemma di intersezione 42; dunque, al variare di K, $\{W_K \cap \omega(u)\}$ è una famiglia di aperti disgiunti non vuoti di $\omega(u)\backslash E$, che è separabile, e dunque gli insiemi $\{W_K \cap \omega(u)\}$ possono essere al più numerabili, e quindi anche le orbite.
Se poi $u_0 \in \omega(u)\backslash E$ è tale che $\gamma(u_0)$ non è periodica, supponiamo per assurdo che $\omega(u_0) \subset \omega(u)$ contenga un punto regolare v_0 e prendiamo una sezione locale S contenente v_0 e un aperto $W \ni v_0$ su cui è definita una mappa di Poincaré τ; si ha $\emptyset \neq \gamma(u_0) \cap S \ni w$, dunque, si ha $\{w, v_0\} \subset S \cap \omega(u)$ con $w \neq v_0$, perché altrimenti $\gamma(u_0)$ sarebbe periodica, ma questo è assurdo perché contraddice il lemma di intersezione 42. □

Osservazione 15.
Il teorema 45 vale anche per l'insieme $\alpha(u)$.

Lezione 8 – 29/11/2011

Teorema 46 (Poincaré - Bendixson)**.**
Sia $x \in U$ e $\omega(x)$ l'insieme ω-limite di x rispetto al sistema (15)*.*
Se $\emptyset \neq \omega(x)$ è compatto e non contiene punti di equilibrio, allora è un'orbita chiusa.

Dimostrazione.
Se $\omega(x)$ non contiene punti di equilibrio, allora per il teorema 45 è unione numerabile di orbite, ma essendo anche compatto è connesso per il teorema 31, e dunque è formato da una sola orbita, che per compattezza dev'essere chiusa. □

Osservazione 16.
Il teorema di Poincaré - Bendixson 46 vale anche per gli insiemi α-limite.

Proposizione 47.
Sia $u \in U$ tale che esiste $u_0 \in \omega(u)$ per cui $\gamma(u_0)$ è periodica. Allora:

1. $\omega(u) = \gamma(u_0)$.
2. *Se T è il periodo di $\gamma(u)$, allora* $\|(T+t)\cdot u - t\cdot u\| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.
3. *Se S è una sezione locale in u_0 e $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ è tale che $S \ni t_k \cdot u \underset{k\to+\infty}{\to} u_0$, allora $t_{k+1} - t_k \underset{k\to+\infty}{\to} T$.*

Dimostrazione.

3 Innanzi tutto, come si deduce dalla dimostrazione del lemma di intersezione 42, una successione con queste proprietà esiste sempre; fissato $\varepsilon > 0$, prendiamo un intorno W di u_0 e una mappa di Poincaré $\tau : W \to \mathbb{R}$: a meno di restringere W, si avrà $|\tau(v)| \leq \varepsilon$; se per assurdo fosse $0 < t_{k+1} - t_k < T - \varepsilon$, allora a meno di estratte si avrebbe $t_{k+1} - t_k \underset{k\to+\infty}{\to} t_\infty \in [0, T-\varepsilon]$, ma questo è assurdo perché

$$u_0 = \lim_{k\to+\infty} t_{k+1}\cdot u = \lim_{k\to+\infty} (t_{k+1} - t_k)\cdot(t_k\cdot u) = t_\infty \cdot u$$

e dunque $t_\infty \notin (0, T-\varepsilon]$, ma non può essere neanche $t_\infty = 0$ perché

$$t_{k+1} - t_k \cdot \underbrace{(t_k \cdot u)}_{\in S} = t_{k+1}\cdot u \in S$$

quindi, dalla seconda osservazione sul lemma della mappa di Poincaré, prendendo $\delta > 0$ tale che per $|t| \leq \delta$ si ha $t\cdot(t_k\cdot u) = 0 \iff \tau(t_k, u) = 0$, dev'essere $t_{k+1} - t_k \geq \delta$.
Inoltre, poiché $(t_k + T)\cdot u \underset{k\to+\infty}{\to} T\cdot u_0 = u_0 \in S$, allora $(t_k+T)\cdot u \in W$ per k sufficientemente grande, dunque è ben definito $\tau((t_k+T)\cdot u)$; inoltre, posta $s_k := t_k + T + \tau((t_k+T)\cdot u) \geq t_k + T - \varepsilon > t_k$, si ha $s_k \cdot u = \tau(t_k+T)\cdot((t_k+T)\cdot u) \in S$ e dunque $s_k \geq t_{k+1}$, ma allora essendo $|\tau| \leq \varepsilon$ si può concludere

$$t_{k+1} - t_k \leq s_k - t_k = T + \tau((t_k+T)\cdot u) \leq T + \varepsilon$$

1 Per l'invarianza degli insiemi ω-limite si ha $\gamma(u_0) \subset \omega(u)$; inoltre, se $C > 0$ è tale che $t_{k+1} - t_k \leq C$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\sup_{t\in[0,T+C]} \|t \cdot (t_k \cdot u) \cdot t - u_0\| \leq \varepsilon$ per $k \geq k_\varepsilon$, dunque per $t \geq t_{k_\varepsilon}$ e $k \geq k_\varepsilon$ tale che $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ allora

$$d(t \cdot u, \gamma(u_0)) \leq \|t \cdot u - (t - t_k) \cdot u_0\| = \|(t - t_k) \cdot (t_k \cdot u) - (t - t_k) \cdot u_0\| \leq \varepsilon$$

e quindi $\omega(u) \subset \gamma(u_0)$.

2 Prendendo t, k come prima si ha

$$\|(T + t) \cdot u - t \cdot u\| \leq \|(T + t) \cdot u - (t - t_k) \cdot u\| + \|(t - t_k) \cdot u - t \cdot u\| =$$

$$= \|(T+t-t_k)\cdot(t_k\cdot u)-(T+t-t_k)\cdot u_0\|+\|(t-t_k)\cdot u_0-(t-t_k)\cdot(t_k\cdot u_0)\| \leq 2\varepsilon$$

perché $T + t - t_k \leq T + C$ e $t - t_k \leq C \leq T + C$.

□

Corollario 48.
Se, $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ sono compatti non vuoti e contengono solo punti di equilibrio isolati, possono essere:

1. *Un punto di equilibrio*
2. *Un'orbita chiusa*
3. *Unione di punti di equilibrio e di orbite iniettive che tendono asintoticamente a punti di equilibrio.*

Dimostrazione.
$\omega(x)$ è compatto e dunque connesso, quindi se contiene solo punti di equilibrio ne può contenere uno solo; se contiene un'orbita chiusa allora non contiene altri punti per la proposizione 47 e, per il teorema di Poincaré-Bendixson, questo vale anche se $\omega(x)$ non ha punti di equilibrio; se invece $\omega(x)$ ha sia punti di equilibrio che punti regolari ma non orbite chiuse, allora per ogni $u \in \omega(x)$ si ha $\gamma(u) \subset \omega(x) \Subset U$ e dunque $\omega(u) \neq \emptyset$ e deve contenere un punto di equilibrio (perché altrimenti per il teorema di Poincaré-Bendixson 46 sarebbe un orbita chiusa), ma allora per il teorema 45 contiene solo equilibri, e per connessione è uno solo x_1, e quindi per il teorema 31 si ha $t \cdot u \underset{t\to+\infty}{\to} x_1$; analogamente per $\alpha(x)$. □

Proposizione 49.
Sia $K \subset U$ un compatto non vuoto, semplicemente connesso e positivamente invariante.
Allora, K contiene un punto di equilibrio.

Dimostrazione.
Sull'insieme $\mathcal{H} = \{\emptyset \neq B \subset K$ compatto, semplicemente connesso e positivamente invariante$\}$ si può definire la relazione d'ordine $B_1 \preceq B_2 \iff B_2 \subset B_1$, e ogni catena $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$

ha come maggiorante $\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha$, dunque $\mathcal{H}$ ha un elemento massimale B_∞; per concludere basterà mostrare che B_∞ contiene un punto di equilibrio.
Se così non fosse, per il teorema di Poincaré-Bendixson $\omega(u_0) = \gamma(u_0)$ sarebbe un'orbita chiusa per ogni $u_0 \in B_\infty$, ma allora per ogni v che si trova all'interno di $\gamma(u_0)$ anche $\gamma(v)$ sarebbe all'interno di $\gamma(u_0)$, e dunque racchiuderebbe un compatto non vuoto semplicemente connesso positivamente invariante $B \supsetneq B_\infty$, che è assurdo. $\square$

Teorema 50 (Brouwer)**.**
Sia $f : U \to \mathbb{R}^2$ localmente Lipschitz e $K \subset U$ compatto non vuoto e convesso tale che $f(\partial K) \subset K$.
Allora, f ha un punto fisso u_0 tale che $f(u_0) = u_0$

Dimostrazione.
È sufficiente mostrare che K è positivamente invariante per il sistema $\dot{u} = f(u) - u$: infatti, essendo K un compatto non vuoto semplicemente connesso, dalla proposizione 49 seguirà l'esistenza di un punto di equilibrio per il sistema, cioè di un punto fisso di u; l'invarianza segue dal fatto che, per ogni $u \in \partial K, h < 1$, dalla convessità si ottiene $u + h(f(u) - u) = (1 - h)u + hf(u) \in K$, dunque $\frac{d(u + h(f(u) - u), K)}{h} \underset{h \to 0}{\to} 0$ e quindi K è positivamente invariante per il teorema 32. $\square$

Esempio 8 (Equazione di Liénard).
Consideriamo l'equazione differenziale $\ddot{u} + f(u)u' + g(u) = 0$ con $f, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tali che

$$\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(-x) = f(x) \\ xg(x) > 0 \text{ se } x \neq 0 \\ g(-x) = -g(x) \\ F(x) := \int_0^x f \underset{x \to \pm\infty}{\to} \pm\infty \\ \exists \beta > 0 \text{ tale che } F(x) < 0 \text{ se } 0 < x < \beta \text{ e } F(x) > 0 \text{ se } x > \beta \end{cases}$$

e mostriamo che esistono soluzioni periodiche: innanzi tutto, l'equazione equivale al sistema planare $\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(y) \end{cases}$; l'origine è l'unico punto di equilibrio, ed è repulsivo perché prendendo $V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g$ si ha $\dot{V}(x, y) = -g(x)F(x) > 0$ intorno a 0; inoltre, le orbite che partono dal semiasse $\{y > 0\}$ devono intersecare il grafico di F, perché $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} < 0$, dunque se così non fosse l'insieme ω-limite sarebbe un'orbita chiusa, che per la proposizione 49 conterrebbe un equilibrio; una volta attraversato il grafico di F, si ha $\dot{x} < 0$, $\dot{y} < 0$, e dunque l'orbita interseca anche il semiasse $\{y < 0\}$, e analogamente attraversa di nuovo il semiasse $\{y > 0\}$; se il punto di arrivo coincide con quello di partenza, la traiettoria è periodica, altrimenti l'orbita e il segmento tra i due punti racchiudono un compatto non vuoto, dunque per il teorema di Poincaré-Bendixson 46 l'ω-limite, non contenendo equilibri, dev'essere un'orbita periodica.