TEOREMA $\forall L \in (L^p)^* \ \exists!\, g \in L^q \ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right): \ Lf = \int fg \ \ \forall f \in L^p$

$1<p<\infty$ OPPURE $p=1$, μ σ-FINITA $\qquad \|L\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q$

PASSO 1 μ FINITA, $L\phi = \int \phi \, d\nu$ $\forall \phi$ SEMPLICE PER QUALCHE ν MISURA CON SEGNO

DIM

DEFINISCO $\nu(E) := L(\chi_E) \in \mathbb{R}$ $\forall E$ MISURABILE PERCHÈ $\chi_E \in L^\infty \subset L^p$ (μ FINITA)

MOSTRO CHE ν È MISURA CON SEGNO:

$\{E_n\}$ DISGIUNTI

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = L\left(\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n}\right) = L\left(\sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n}\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=1}^\infty L\chi_{E_n} = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)$$

$L\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \chi_{E_n}\right)$ $\quad$ L LINEARE CONTINUO $\quad$ $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N L\chi_{E_n}$

PER LINEARITÀ, $\phi = \sum_{n=1}^N c_n \chi_{E_n} \Rightarrow L\phi = \int \phi \, d\nu$

PASSO 2 μ FINITA $\Rightarrow \nu = g\mu$ PER $g \in L^q$, $\|L\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q$ (IL TEOREMA VALE SE μ È FINITA)

DIM $\nu \ll \mu$ PERCHÈ SE $\mu(E)=0$ ALLORA $\chi_E = 0$ IN L^p $\Rightarrow \nu(E) = L(\chi_E) = L(0) = 0$

PER RADON-NIKODYM $\nu(E) = \int_E g \, d\mu$ PER QUALCHE g

SE ϕ È SEMPLICE, $L\phi \overset{(1)}{=} \int \phi \, d\nu = \int \phi g \, d\mu \Rightarrow +\infty > \|L\|_{(L^p)^*} \geq \sup_{\substack{\|\phi\|_p=1 \\ \phi \text{ SEMPLICI}}} \left|\int \phi g\right|$

$\overset{\text{LEMMA DI IERI}}{\Longrightarrow} g \in L^q$, $\|g\|_{L^q} = \|L\|_{(L^p)^*}$

PASSO 3 ESTENSIONE A μ σ-FINITA $\quad L^p(X_n) \subset L^p(X)$

DIM $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ $\quad \mu(X_n) < +\infty$ UNIONE CRESCENTE $\quad f \in L^p(X_n) \Rightarrow Lf = \int f g_n$

SU CIASCUN X_n VALE IL TEOREMA $\Rightarrow Lf = \int f g_n$ PER QUALCHE $g_n \in L^q$ SE f È NULLA FUORI DA X_n

DEFINISCO g COME $g|_{X_n} = g_n$

SE $m>n$, $X_n \subset X_m$ MA $g_m|_{X_n} = g_n$ (UNICITÀ DI g) $\Rightarrow g$ È BEN DEFINITA

FACCIO VEDERE CHE $Lf = \int fg$ $\forall f \in L^p$

$g \in L^q$ PERCHÈ $\|g\|_q = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_q \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \|L\|_{(L^p(X_n))^*} \leq \|L\|_{(L^p(X))^*}$

$|g_n|^q = |g|^q \chi_{X_n}$ CONV. MONOTONA

$$Lf = \lim_{n\to\infty} L(f\chi_{X_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} fg = \int fg$$

$f\chi_{X_n} \to f$ IN L^p, L CONTINUO

$\left|\int_{X_n} fg - \int fg\right| \leq \int |f\chi_{X_n} - f|\,|g| \leq \underbrace{\|f\chi_{X_n} - f\|_p}_{\to 0 \text{ PER CONVERGENZA DOMINATA}} \|g\|_q \to 0$

$\|L\|_{(L^p)^*} = \sup_{\|f\|_p=1} \left|\int fg\right| \leq \overset{=1}{\cancel{\|f\|_p}} \|g\|_q \Rightarrow \|L\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q$

PASSO 4 ESTENSIONE GENERALE SE $q<\infty$

$\forall E \subset X$ σ-FINITO $\exists\, g_E$ TALE CHE $\int f g_E = Lf$ SE f NULLA SU $X \setminus E$

DEFINISCO $M := \sup\{\|g_E\|_q : E \ \sigma\text{-FINITO}\} \leq \|L\|_{(L^p)^*} < +\infty$

SE $\|g_{E_n}\|_q \to M$, $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ È σ-FINITO, INOLTRE $\|g_E\|_q \geq \|g_{E_n}\|_q \to M$

$(F \subset F', g_{F'}|_F = g_F \Rightarrow \|g_{F'}\|_q \geq \|g_F\|) \Rightarrow$ DEV'ESSERE $\|g_E\|_q = M$

SE $F \supset E$, F σ-FINITO, ALLORA $M^q \geq \int |g_F|^q = \underbrace{\int |g_E|^q}_{= M^q} + \int |g_{F\setminus E}|^q \Rightarrow$ DEV'ESSERE $g_{F\setminus E} \equiv 0$ q.o.

$\Rightarrow g_F = g_E$ q.o.

DEVO MOSTRARE CHE $Lf = \int f g_E$ $\forall f \in L^p$

$F := E \cup \{x : f(x) \neq 0\}$ È σ-FINITO $\qquad f$ NULLA FUORI F

$\Rightarrow Lf = \int f g_F \overset{\nabla}{=} \int f g_E$.