Soluzioni degli esercizi su integrali e serie

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x;$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\arctan x}{x}\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} -\frac{1}{x\,(1+x^2)}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} - \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{9-4\sqrt{3}}{36}\pi - \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \ln|x|\right]_1^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{9-4\sqrt{3}}{36}\pi - \left(\frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 2 + \ln\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{9-4\sqrt{3}}{36}\pi + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} e^{3x}\cos(2x)\mathrm{d}x;$$

Integrando due volte per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{3x}\cos(2x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{3x}}{3}(-2\sin(2x))\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{3\pi}-1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi} e^{3x}\sin(2x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{3\pi}-1}{3} + \frac{2}{3}\left(\left[\frac{e^{3x}}{3}\sin(2x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{3x}}{3}(2\cos(2x))\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{e^{3\pi}-1}{3} - \frac{4}{9}\int_0^{\pi} e^{3x}\cos(2x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{\pi} e^{3x}\cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{\frac{e^{3\pi}-1}{3}}{1+\frac{4}{9}} = \frac{3}{13}\left(e^{3\pi}-1\right).$$

$$\int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x;$$

Con il cambio di variabile $y = \sqrt[3]{x}$ e integrando successivamente per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 e^y 3y^2\mathrm{d}y \\
&= 3\left(\left[y^2e^y\right]_0^1 - \int_0^1 2ye^y\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\left(e-\left([2ye^y]_0^1-\int_0^1 2e^y\right)\right)\\
&= 3\left(e-2e+[2e^y]_0^1\right)\\
&= 3(e-2).
\end{aligned}
$$

$$\int_1^{e^{\frac{\pi}{6}}} \frac{1}{x(1-\sin(\ln x))}\mathrm{d}x;$$

Con i cambi di variabile $y=\dfrac{1}{x}$ e $t=\tan\dfrac{y}{2}$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\int_1^{e^{\frac{\pi}{6}}} \frac{1}{x(1-\sin(\ln x))}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1-\sin y}\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t\\
&= 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\\
&= \frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}-2\\
&= \sqrt{3}+1.
\end{aligned}
$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3+x^2}{1+|x|}\mathrm{d}x.$$

Poiché la funzione $\dfrac{x^3}{1+|x|}$ è dispari mentre $\dfrac{x^2}{1+|x|}$ è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{x^3+x^2}{1+|x|}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \frac{1}{1+|x|}\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|\right]_0^1\\
&= 2\ln 2-1.
\end{aligned}
$$

Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{k}}-1\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(e^{\frac{1}{k}}-1\right);$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, dal criterio degli infinitesimi con $p=1$ deduciamo che:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{k}}-1\right) \text{ NON CONVERGE;}$$

Poiché $e^{\frac{1}{n}} - 1$ è positivo, infinitesimo e decrescente, allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right) \text{ CONVERGE.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2}{k^2}}{2 + \sin(k^2)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{2}{k^2}}{2 + \sin(k^2)};$$

Poiché $0 \leq \dfrac{\sin \frac{2}{n^2}}{2 + \sin(n^2)} \leq \sin \dfrac{2}{n^2} \leq \dfrac{2}{n^2}$, dal confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ deduciamo che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2}{k^2}}{2 + \sin(k^2)} \text{ CONVERGE;}$$

Poiché la serie converge assolutamente, allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{2}{k^2}}{2 + \sin(k^2)} \text{ CONVERGE.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - k \sin \frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(1 - k \sin \frac{1}{k}\right);$$

Dallo sviluppo di Taylor $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ si ottiene $1 - n \sin \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, dunque dal confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ deduciamo che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - k \sin \frac{1}{k}\right) \text{ CONVERGE;}$$

Poiché la serie converge assolutamente, allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(1 - k \sin \frac{1}{k}\right) \text{ CONVERGE.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k^2}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{2^{k^2}};$$

Poiché $\sqrt[n]{\dfrac{3^n}{2^{n^2}}} = \dfrac{3}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, dal criterio della radice otteniamo che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k^2}} \text{ CONVERGE;}$$

Poiché la serie converge assolutamente, allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{2^{k^2}} \text{ CONVERGE.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{k^k}.$$

Poiché $\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{n^n}} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (2n+2)(2n+1)\frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, dal criterio del rapporto si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^k} \text{ NON CONVERGE;}$$

Dal criterio del rapporto deduciamo che la serie non è infinitesima, dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{k^k} \text{ NON CONVERGE.}$$