Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Tutorato numero 1 (21 Febbraio 2008)
Spazi vettoriali, somme e prodotti di matrici

1. Enunciare la definizione di spazio vettoriale e dare a K^n una struttura di spazio vettoriale su K.

2. Sia $A := \{f : X \to K\}$ l'insieme delle funzioni da un fissato insieme X a valori su un campo K. Dimostrare che A è uno spazio vettoriale su K con le seguenti operazioni:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

3. Sia H un campo e K un suo sottocampo. Mostrare che H è uno spazio vettoriale su K con le operazioni di somma e prodotto ivi definite.

4. Dimostrare che per ogni matrice quadrata si ha che $A \cdot {}^tA$ e $A + {}^tA$ sono matrici simmetriche, mentre $A - {}^tA$ è antisimmetrica. Dedurne che ogni matrice quadrata può essere scritta come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$. Calcolare:

$$A^2 - \mathbb{I}_3 \qquad (A + \mathbb{I}_3) \cdot (A - 2\mathbb{I}_3) \qquad ({}^tA)^2 + {}^tA$$

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Calcolare:

$$A^2 + i \cdot A + i \cdot \mathbb{I}_2 \qquad A^3 - 2 \cdot A \qquad {}^tA \cdot A + {}^tA + A$$

7. Calcolare, quando possibile, le seguenti somme e prodotti tra matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot C \qquad C \cdot B \cdot A \qquad C + (B \cdot A) \qquad (A + {}^tB) \cdot C \qquad A \cdot {}^tB \qquad {}^tA + B$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 2 (28 FEBBRAIO 2008)
SISTEMI LINEARI E MATRICI INVERSE

1. Determinare, se esistono, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, usando il metodo Gauss-Jordan:

(a) $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ y+4z=4 \\ 3y=5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x+y+4z=1 \\ \frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=1 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-y-z=1 \\ y+3z=2 \\ 2y+2z=3 \\ x+y=4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w=2 \\ y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w=3 \\ x+y-w=5 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x+y+z+3w=0 \\ 2y-z=0 \\ x-2w=0 \\ y+z+w=0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x+y+4z=1 \\ \frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 46x+92y+184z=92 \\ 3x+7y+11z=6 \\ 12x+30y+42z=24 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y+z=0 \\ x+2z=1 \\ x+y=4 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x+3y+z-2w=1 \\ y+z-w=1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 4x+2y+z+3w=0 \\ 5x+3y+z+4w=0 \\ 23x+8y+7z+9w=1 \\ 6x+3z+2w=0 \end{cases}$

2. Per ognuna delle seguenti matrici $M \in M_n(\mathbb{R})$, trasformare con operazioni elementari sulle righe la matrice $(M|\mathbb{I}_n)$ in una matrice del tipo $(\mathbb{I}_n|N)$. Mostrare che $N = M^{-1}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Mostrare che per ogni matrice invertibile A si ha $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. Mostrare che l'inversa di ogni matrice simmetrica invertibile è anch'essa simmetrica.

4. Mostrare che una matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$ è invertibile $\Leftrightarrow a_i \neq 0, \forall i$ e in tal caso la sua inversa è $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Tutorato numero 3 (6 Marzo 2008)
Sottospazi vettoriali, generatori, dipendenza lineare, basi

1. Determinare, se esistono, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, usando il metodo Gauss-Jordan:

(a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 2y + 3z + 4w = \frac{1}{2} \\ y - 2z = \frac{3}{4} \\ x - z + 4w = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2 \\ x - 2y = 3 \\ -y + 4z = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y + 5z = 1 \\ 7x + 2y + 4z = 1 \\ 6x + 3y + 9z = 2 \end{cases}$

2. Mostrare che l'insieme dei polinomi $K[X]$ a coefficienti in un campo K è un K-spazio vettoriale che non possiede una base finita. Sia Π_n l'insieme dei polinomi di grado $\leq n$: mostrare che è un sottospazio vettoriale di $K[X]$ e trovarne la dimensione.

3. Mostrare che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$:

   (a) Il campo dei razionali gaussiani $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib; a, b \in \mathbb{Q}\}$

   (b) Il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$

   Mostrare poi che $\mathbb{Q}(i)$ ha dimensione 2 mentre $\mathbb{R}$ non ha una base finita.

4. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono suoi sottospazi vettoriali:

   (a) $\{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$

   (b) $\{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$

   (c) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 0\}$

   (d) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$

   (e) $\{(x, y, z) : 3y - z = 0, x + 2z = 0\}$

   (f) $\{(x, y, z) : x = 0\} \cup \{(x, y, z) : z = 0\}$

5. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base. Se sono dipendenti, scrivere uno di questi come combinazione lineare degli altri. Se possibile, trovare una combinazione lineare che dia come risultato $(1, 1, 1)$.

   (a) $v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (1, -2, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0)$

   (b) $v_1 = (0, 5, 5)$, $v_2 = (3, 2, 1)$, $v_3 = (\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2})$

   (c) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, -2, -2)$, $v_3 = (1, 2, 1)$, $v_4 = (0, 2, 2)$

   (d) $v_1 = (2, 3, 0)$, $v_2 = (0, 1, -2)$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 4 (13 MARZO 2008)
RANGO, DIMENSIONE, BASI, FORMULA DI GRASSMANN

1. Dire se i seguenti insiemi di vettori costituiscono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$:

   (a) $\{(1,2),(-1,1)\}$

   (b) $\{((2,-3),(1,-\frac{3}{2})\}$

   (c) $\{(1,3,0),(1,5,0),(0,-2,0)\}$

   (d) $\{(0,-1,0),(0,1,1),(2,0,0)\}$

2. Trovare le dimensioni di U, W, $U+W$, $U \cap W$ e una base per ognuno di essi:

   (a) $U = \langle (1,0,1),(1,-1,2),(1,1,0) \rangle \qquad W = \langle (1,1,1),(0,-1,1),(1,2,0) \rangle$

   (b) $U = \langle (0,1,1),(0,0,-1),(1,1,-1) \rangle \qquad W = \langle (3,0,3),(1,-1,1),(0,3,0) \rangle$

   (c) $U = \langle (1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,-1,0) \rangle \qquad W = \langle (2,-1,0,0),(0,0,1,-1),(1,1,1,1) \rangle$

   (d) $U = \langle (1,1,0,0),(0,0,1,1),(3,3,-2,-2) \rangle \qquad W = \langle (2,4,2,3),(1,2,1,2),(1,2,1,1) \rangle$

3. Determinare una base dei seguenti sottospazi e completarla ad una base di $\mathbb{R}^n$:

   (a) $\langle (3,3,6),(1,2,3),(0,-1,-1) \rangle$

   (b) $\langle (1,1,-2),(1,-1,2),(0,2,-4) \rangle$

   (c) $\langle (-1,0,-1,-2),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1),(1,1,1,2),(1,3,1,2) \rangle$

   (d) $\langle (1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,-1,0),(0,1,0,1) \rangle$

4. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   $A \cdot B \qquad B \cdot C \qquad C \cdot D \qquad D \cdot A$

5. Mostrare che una matrice $M \in M_{n,m}(K)$ ha rango $\leq 1 \Leftrightarrow$ esistono $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ e $(b_1, \dots, b_m)$ tali che $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (b_1, \dots, b_m) = M$.

6. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, \dots v_n \in V$ tali che $v_i \neq 0 \ \forall i$. Mostrare che $\langle v_1, v_2, \dots v_n \rangle = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle \Leftrightarrow v_1, v_2, \dots v_n$ sono linearmente indipendenti.
   (Suggerim.: $\langle v_1, v_2, \dots v_n \rangle = \langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle$ per qualsiasi $v_1, v_2, \dots v_n$)

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Tutorato numero 5 (27 Marzo 2008)
Rango, determinante, matrici inverse, discussione di sistemi

1. Determinare, al variare del parametro reale a, le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, usando il metodo Kronecker-Rouché-Capelli.

(a) $\begin{cases} x+2y+3z=a \\ ay+az=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+az=-1 \\ y=-a \\ ax+z=-a \end{cases}$

(c) $\begin{cases} ax+2y+3z=-5 \\ (a-1)x-z=3 \\ (a+1)x+y=2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+y+az=2a \\ ax+y+z=2 \\ x+ay+z=a+1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ ay-z=-2 \\ 2x+4z=-2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x+y=1 \\ ay-2z=2 \\ 2x+az=a-2 \end{cases}$

2. Stabilire, al variare del parametro reale b, quando le seguenti matrici sono invertibili. Se invertibili, trovare l'inversa, altrimenti trovare una matrice quadrata M (diversa dalla matrice nulla) che moltiplicata per quella matrice da la matrice nulla.

$$A=\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} D=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Trovare i valori del parametro reale c per cui il rango delle seguenti matrici è massimo.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ c & c & c \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c \\ c-1 & 1 & c+1 & 0 \\ c & c & c & c \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & c & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & c \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} D=\begin{pmatrix} c & 1 & c-1 \\ c & 0 & 1 \\ c & 1 & c+1 \\ c & c & 0 \end{pmatrix}$$

4. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo K. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere; se vere, dimostrarle, altrimenti esibire un controesempio.

(a) $r(A+B) \leq r(A), r(B)$
(b) $r(A)=r=r(B) \Rightarrow r(A\cdot B)=r \quad (r<n)$
(c) $r(A)=n=r(B) \Rightarrow r(A\cdot B)=n$
(d) $r(A)<n,\, r(B)<n \Rightarrow r(A\cdot B)<n$
(e) $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$
(f) $\det(k\cdot A)=k\cdot\det(A) \quad (k\in K)$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 6 (3 APRILE 2008)
ESERCIZI DI PREPARAZIONE AL PRIMO ESONERO

1. Calcolare, al variare del parametro reale k, le dimensioni di U e W, stabilire quando $U+W=\mathbb{R}^n$ e se tale somma è diretta:

   (a) $U=\langle(1,1,0),(k-1,k-1,k)\rangle \qquad W=\langle(0,0,k),(1,0,1)\rangle$

   (b) $U=\langle(1,-1,0),(0,2,1)\rangle \qquad W=\langle(k,3,k),(3,k,3),(k,k,k)\rangle$

   (c) $U=\langle(1,1,k,k),(k,-k,0,0),(0,2,1,k)\rangle \qquad W=\langle(1,0,1,-1),(1,2,0,k)\rangle$

   (d) $U=\langle(1,k,k,-1),(k,1,1,-k)\rangle \qquad W=\langle(0,2,0,k),(1,0,k,3)\rangle$

2. Calcolare, con il metodo Gauss-Jordan, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

   (a) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=3 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=3 \\ x-2x_2+x_3=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_2+x_3+x_4=1 \\ -x_1+2x_3+x_4=1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_2+2x_3=-1 \\ x_1+2x_2=-2 \\ -x_1+x_2+3x_3=0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1+x_3=2 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \\ 2x_1+3x_2=1 \end{cases}$

3. Determinare esplicitamente tutte le soluzioni dei seguenti sistemi lineari al variare del parametro reale m, usando il metodo di Cramer in caso di soluzione unica:

   (a) $\begin{cases} x+my+mz=0 \\ mz=-1 \\ x+y-z=2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+2y+mz=3-m \\ 3x+2my+(m+6)z=3-m \\ (m-3)z=3-m \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} mx-mz=m \\ x+my=m+1 \\ y+mz=1-m \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x+y-4z=1 \\ 3x-2z=m \\ -x+y-2z=2 \end{cases}$

4. Stabilire, al variare del parametro reale h, quando le seguenti matrici sono invertibili. Se invertibili, trovare l'inversa, altrimenti calcolarne il rango.

   $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ h-1 & 0 & 1-h \\ 0 & 2h-2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ h-2 & 2-h & h+1 \\ 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix}$

   $C=\begin{pmatrix} 0 & h & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} h & h & 3h \\ -h & 0 & 0 \\ 2h & 0 & 2h \end{pmatrix}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Tutorato numero 7 (17 Aprile 2008)
Spazi affini, punti e rette nel piano affine

1. Stabilire se i punti A, B, $C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e, in caso affermativo, trovare equazioni cartesiane della retta che li contiene. Quando c'è un parametro, discuterlo.

   (a) $A = (2,1) \quad B = (1,2) \quad C = (2,3)$.

   (b) $A = (2,2) \quad B = (0,-1) \quad C = (6,8)$.

   (c) $A = (0,0) \quad B = (1,k) \quad C = (k,1)$.

2. Determinare equazioni parametriche e cartesiane delle seguenti rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ parallele a v e passanti per P:

   (a) $P = (2,0) \quad v = (1,-1)$

   (b) $P = (1,-1) \quad v = (2,0)$

   (c) $P = \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \quad v = (400,300)$

3. Stabilire se le seguenti rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono parallele e coincidenti, parallele e distinte, oppure incidenti; se sono incidenti, calcolare il loro punto di intersezione.

   (a) $r : x+y+1=0 \quad s : 2x-2y=0$

   (b) $r : x+3y-6=0 \quad s : \begin{cases} x = 3+6t \\ y = 1-2t \end{cases}$

   (c) $r : \begin{cases} x = 1+\frac{t}{2} \\ y = 3+\frac{3}{2}t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+6t \end{cases}$

4. Siano $r : x+y-2=0$ e $s : 2x-y+3=0$ due rette del piano affine reale e Φ il fascio di rette passante per l'origine $O(0,0)$. Trovare:

   (a) Il punto $P = r \cap s$.

   (b) Equazioni parametriche della retta $t \in \Phi$ passante per P.

   (c) Equazioni cartesiane delle retta $u \in \Psi$ passante per $Q(1,1)$, dove Ψ indica il fascio improprio di rette parallele a t.

   (d) Il punto $R = s \cap u$.

5. (a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per $P(0,\frac{1}{2})$ e $Q(1,0)$

   (b) Sia Ψ il fascio di rette di centro $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$. Scrivere l'equazione cartesiana della retta $s \in \Psi$ passante per $(1,\frac{1}{2})$

   (c) Trovare equazioni cartesiane delle rette r' e s' tali che $r' \cap s' = (\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ con $r' \in \Phi_r$ e $s' \in \Phi_s$, dove Φ_r e Φ_s indicano i fasci di rette parallele rispettivamente a r e s

6. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$. Mostrare che A è uno spazio affine su $\mathbb{R}$. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Mostrare che l'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\}$ è uno spazio affine su $\mathbb{R}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Tutorato numero 8 (24 Aprile 2008)
Spazi affini di dimensione 3 e applicazioni lineari

1. Stabilire se i punti $A, B, C \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sono allineati, in presenza di un parametro discuterlo. Nel caso in cui i punti non risultassero allineati determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano che li contiene (in presenza di un parametro imporre un valore opportuno e procedere).

   (a) $A = (3, 2, 1)$ $B = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ $C = (-\frac{9}{2}, -4, \frac{5}{2})$

   (b) $A = (1, 1, 1)$ $B = (0, 1, 2)$ $C = (2, 1, 5)$

   (c) $A = (0, 1, 1)$ $B = (1, 0, 0)$ $C = (m + 1, m + 2, m + 2)$

   (d) $A = (m - 1, -2, -2)$ $B = (1, -1, -1)$ $C = (m - 1, m, 0)$

2. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

   (a) Sia r la retta di equazioni cartesiane
   $$r : \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$
   Determinare le equazioni parametriche di r.

   (b) Sia s la retta di equazioni cartesiane
   $$s : \begin{cases} y + 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$
   Dire se r ed s sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il punto di intersezione.

   (c) Determinare le equazioni cartesiane della retta t complanare con le rette r ed s e passante per il punto $P = (2, 1, -1)$.

   (d) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta q passante per il punto $Q = (2, -1, -1)$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = (-1, 0, 5)$.

   (e) Dire se t ed q sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il punto di intersezione.

3. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

   (a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto $P = (2, 1, 3)$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = (-1, -1, 1)$

   (b) Sia s la retta di equazioni cartesiane
   $$s : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$
   Dire se le rette r ed s sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti trovare il punto di intersezione.

(c) Trovare l'equazione del piano p' passante per il punto $Q = (1, -1, -2)$ e parallelo alle rette r ed s.

(d) Determinare l'equazione del piano p'' appartenente al fascio proprio di piani di asse r e passante per il punto $A = (1, -1, 6)$.

(e) Sia $t = p' \cap p''$. Determinare la retta q complanare con le rette r ed s e tale che $t \cap q = (0, 2, -1)$

4. Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e determinarne nucleo ed immagine:

   (a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $(x, y, z) \to (2z - x, x + y, x + 2y + 2z)$

   (b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $(x, y, z) \to (3x+y+2z, -2x-2y-z, x+z)$

   (c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $(x, y, z) \to (x + y - z, x - y + z)$

   (d) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita come $(x, y) \to (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y)$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Tutorato numero 9 (5 Maggio 2008)
Applicazioni lineari e matrici associate

1. Scrivere le matrici di cambiamento di base $M_{a,b}(\mathbb{I})$ e $M_{b,a}(\mathbb{I})$, dove a e b sono le seguenti basi di $\mathbb{R}^n$:
   (a) $a = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ $\quad b = \{(1,2,1),(0,-1,0),(0,1,1)\}$
   (b) $a = \{(0,1,2),(1,0,-1),(0,1,1)\}$ $\quad b = \{(1,1,1),(0,3,2),(0,2,1)\}$
   (c) $a = \{(1,1,1,1),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,0,0,0)\}$
   $b = \{(0,0,0,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(1,1,1,1)\}$
   (d) $a = \{(1,0,1,0),(1,0,-1,0),(0,1,0,-1),(0,1,0,1)\}$
   $b = \{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$

2. Siano $v = \{(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)\}$ e $w = \{(1,1,1,0),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(0,1,1,1)\}$ due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
   $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x,y,z) = (x+y, y+2z, 2x+2z)$
   $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, G(x,y,z) = (x+y+z, y, -2x-2z, x+2y+3z)$
   $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, H(x,y,z,w) = (y-z, 2x-2z, w)$
   $I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, I(x,y,z,w) = (x-z+2w, y+w, 2x-y+z, 3x+w)$
   Determinare le matrici associate a tali applicazioni $M_v(F)$, $M_{w,v}(G)$, $M_{v,w}(H)$ e $M_w(I)$.

3. Sia $T \in End(\mathbb{R}^3)$ l'applicazione lineare tale che:
   $T(0,1,1) = (1,0,1) \qquad T(1,0,1) = (0,-1,1) \qquad T(1,1,0) = (-1,-1,0)$
   Trovare le matrici di cambiamento di base $M_{e,b}(\mathbb{I}_3)$ e $M_{b,e}(\mathbb{I}_3)$, dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $b = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ e le matrici che rappresentano T rispetto a queste due basi.

4. Sia Π_3 lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado ≤ 3 a coefficienti reali e $F : \Pi_3 \to \Pi_3$ l'applicazione lineare tale che $F(X^n) = n \cdot X^{n-1}$, per $n = 0,1,2,3$. Calcolarne nucleo e immagine e trovare $M_e(F)$ e $M_b(F)$, dove e è la base canonica $\{1, X, X^2, X^3\}$ e b è la base $\{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$.

5. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, v_2 \ldots v_n \in V$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere; se vere, dimostrarle, altrimenti esibire un controesempio:
   (a) Se $F \in End(V)$ e $v_1, v_2 \ldots v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $F(v_1), F(v_2) \ldots F(v_n)$ sono linearmente dipendenti.
   (b) Se $F \in End(V)$ e $v_1, v_2 \ldots v_n$ sono linearmente indipendenti, allora $F(v_1), F(v_2) \ldots F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.
   (c) Se $F \in GL(V)$ e $v_1, v_2 \ldots v_n$ sono linearmente indipendenti, allora $F(v_1), F(v_2) \ldots F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

6. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base di $\mathbb{R}^4$. Mostrare che non può esistere un'applicazione lineare $F \in End(\mathbb{R}^4)$ tale che:
   $F(e_1+e_3) = e_1 \qquad F(e_2+e_4) = e_2 \qquad F(e_1+e_2) = e_3 \qquad F(e_3+e_4) = e_4$

7. Siano U, V, W tre K-spazi vettoriali e $G : U \to V$ e $F : V \to W$ due applicazioni lineari. Mostrare che $\ker(G) \subseteq \ker(F \circ G)$ e $Im(F \circ G) \subseteq Im(F)$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Tutorato numero 10 (8 Maggio 2008)

Cambiamento di coordinate affini, diagonalizzazione

1. Sia $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ lo spazio affine reale di dimensione n. Determinare le formule di cambiamento di coordinate affini dal sistema di riferimento affine standard $O, e_1, \ldots, e_n$ al sistema di riferimento $O', f_1, \cdots, f_n$:
   (a) $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ $\quad O' = (-2,0), f_1 = (1,1), f_2 = (-1,1)$
   (b) $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ $\quad O' = (-1,1), f_1 = (3,5), f_2 = (2,3)$
   (c) $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ $\quad O' = (2,0,2), f_1 = (-1,2,0), f_2 = (1,0,1), f_3 = (1,1,-1)$
   (d) $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ $\quad O' = (1,1,1), f_1 = (0,0,1), f_2 = (0,1,-1), f_3 = (1,-1,0)$

2. Per ognuno dei seguenti operatori lineari $F, G, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, verificare se sono diagonalizzabili; in tal caso, trovare una base $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ di autovettori, scrivere la formula di passaggio da $M_e(F)$ a $M_b(F)$ (rispettivamente, da $M_e(G)$ a $M_b(G)$ e da $M_e(H)$ a $M_b(H)$), dove $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica, e verificare che quest'ultima matrice è diagonale:
   $F(x,y,z) = (3x+3z, x+2y+z, 2y)$
   $G(x,y,z) = (x-y+3z, -2z, -x+y-z)$
   $H(x,y,z) = (x+2y+z, x+y+z, z)$

3. Trovare gli autovalori di ognuna delle seguenti matrici reali e i rispettivi autospazi; stabilire se sono diagonalizzabili e in tal caso trovare una matrice diagonale a cui sono simili e una matrice M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ (rispettivamente, $M^{-1} \cdot B \cdot M$, $M^{-1} \cdot C \cdot M$) sia diagonale:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Determinare i valori del parametro reale k per cui le seguenti matrici reali sono diagonalizzabili:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

5. Sia $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ così definita: $F(A) = {}^tA$. Verificare che è un'applicazione lineare e scriverne la matrice associata rispetto alla base canonica $e = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ e rispetto alla base $b = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$. Trovare autovalori, relativi autospazi e dire infine se è diagonalizzabile.

6. Sia $A \in M_n(K)$. Dimostrare che gli autovalori di ${}^tA$ sono gli stessi di A. Anche gli autovettori sono gli stessi?

7. Sia A una matrice quadrata diagonalizzabile. Dimostrare che A^2 è diagonalizzabile. È vera anche l'implicazione inversa?

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Tutorato numero 11 (15 Maggio 2008)
Spazi duali, ripasso su spazi affini e applicazioni lineari

1. Sia V un K-spazio vettoriale; si consideri $V^\vee = Hom(V, K)$ l'insieme delle applicazioni lineari da V in K. Dimostrare che $V^\vee$ ha anch'esso una struttura di K-spazio vettoriale con le seguenti operazioni di somma e prodotto:
   $\forall L_1, L_2 \in V^\vee \qquad (L_1 + L_2)(v) := L_1(v) + L_2(v) \qquad \forall v \in V$
   $\forall L \in V^\vee, \forall c \in K \qquad (c \cdot L)(v) := c \cdot L(v) \qquad \forall v \in V$
   Supponiamo ora che V abbia dimensione finita, e sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V; si consideri, per $i = 1, \dots, n$, il funzionale $\eta_i \in V^\vee$ tale che $\eta_i(e_j) = \delta_{ij}$, dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$. Dimostrare che $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ è una base di $V^\vee$. (In particolare, $\dim V = \dim V^\vee$, quindi V e $V^\vee$ sono isomorfi.)
   ($V^\vee$ è detto *spazio duale* di V e $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ è detta *base duale* di $e = \{e_1, \dots, e_n\}$.)

2. Sia $V = \mathbb{R}[X, Y]_3$ lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di terzo grado nelle due indeterminate X e Y a coefficienti reali e sia $F \in End(V)$ l'applicazione lineare che scambia le due indeterminate, cioè tale che:
   $F(X^3) = Y^3 \qquad F(X^2Y) = XY^2 \qquad F(XY^2) = X^2Y \qquad F(Y^3) = X^3$.
   Rappresentare tale applicazione in forma matriciale rispetto alla base canonica $\{X^3, X^2Y, XY^2, Y^3\}$, determinarne gli autovalori e i relativi autospazi e dire infine se è diagonalizzabile.

3. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e $F \in End(V)$ diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dimostrare che V è somma diretta di tutti gli autospazi di F, ovvero $V = \bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i}$.

4. Dimostrare che l'unica matrice unitriangolare (superiore o inferiore) diagonalizzabile di ordine n è la matrice identità. (Si ricorda che una matrice unitriangolare è una matrice triangolare avente tutti 1 sulla diagonale principale).

5. Siano U, V, W dei K-spazi vettoriali e $U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W$ una successione di applicazioni lineari tale che F sia iniettiva, G sia suriettiva e $Im(F) = \ker(G)$. Dimostrare che $\dim V = \dim U + \dim W$.
   (Una siffatta successione di applicazioni lineari è detta *successione esatta corta*).

6. Determinare il valore del parametro h per cui le rette r e s dello spazio affine reale tridimensionale sono complanari; per tale valore, determinare il loro piano comune, verificare se sono parallele o incidenti e, in quest'ultimo caso, trovare il loro punto di intersezione:

   (a) $r : x + y - 3 = 0 = y - z \qquad s : z + h = 0 = x - 2z$

(b) $r: x+y=0=x-z-3 \qquad s: y+z=0=hx+y-z$

(c) $r: y-hz=0=x-1 \qquad s: x+2z=0=x+3y+2z$

7. Determinare nucleo e immagine dei seguenti operatori lineari, trovarne autovalori e autospazi e dire se sono diagonalizzabili:

(a) $F \in End(\mathbb{R}^3): \qquad F(x,y,z)=(x+y+z, x+y+z, x+y+z)$

(b) $F \in End(\mathbb{R}^3): \qquad F(x,y,z)=(x-2y+z, y+3z, 2z)$

(c) $F \in End(\mathbb{R}^4): \qquad F(x,y,z,w)=(x+w, y+z, y+z, x+w)$

8. Stabilire per quali valori del parametro k le seguenti matrici reali sono diagonalizzabili: $A = \begin{pmatrix} k+1 & -k & -1 \\ k & -k+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 1 & k \end{pmatrix}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Tutorato numero 12 (22 Maggio 2008)
Esercizi di preparazione al secondo esonero

* Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare una base di ognuno dei seguenti sottospazi e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$:
$U = \langle(1,1,0,0),(1,-1,-1,-2),(2,0,-1,-2),(1,2,1,2)\rangle$
$V = \langle(1,0,1,0),(1,1,1,0),(2,1,2,0),(1,-1,1,0)\rangle$
$W = \langle(1,0,2,0),(0,1,0,-1),(1,0,1,1),(3,1,0,0)\rangle$

** Determinare, al variare del parametro reale m, se i seguenti sistemi sono compatibili e in tal caso determinare esplicitamente tutte le soluzioni:

(a) $\begin{cases} x+y=m \\ y-2z=0 \\ mx+z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (m+1)x-z=-1 \\ mz=m \\ x+(m-1)y+z=-1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ mx+2y-2z=1 \end{cases}$

1. Trovare il valore del parametro h per cui le due rette r e s sono incidenti e, per quel valore, determinare il loro punto di intersezione:

   (a) $r: x+y+z-1=0=hy-z-1 \qquad s: 3x-1=0=y-z$
   (b) $r: x+2z-h=0=y-z \qquad s: x+hy+z=0=x-y+3z$

2. Trovare il valore del parametro h per cui le due rette r e s sono parallele e, per quel valore, determinare il piano che le contiene entrambe:

   (a) $r: 2x+z+1=0=y-2z \qquad s: 2x+hy-z=0=y-2z+1$
   (b) $r: y-z+h=0=x-y+2z \qquad s: x+hy=0=2x+y+z+1$

3. Determinare la retta s dello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per il punto Q, incidente la retta r e contenuta nel piano π:

   (a) $Q=(-2,1,1) \qquad r: 3x-y-3=0=x-2z-3 \qquad \pi: x+y+z=0$
   (b) $Q=(1,2,3) \qquad r: x+2z-2=0=y+z \qquad \pi: x-y+1=0$

4. Calcolare il rango delle seguenti applicazioni lineari $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, e trovare le matrici che le rappresentano rispetto alle basi canoniche e le matrici che le rappresentano rispetto alle basi $a = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $b = \{(0,0,-1,1),(0,-1,1,0),(-1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$:

   (a) $F(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, x-y+z, x-y-z)$
   (b) $F(x,y,z) = (x-y, y-x, 0, x+y)$
   (c) $F(x,y,z) = (x+3z, x-z, 3x+z, x+z)$

5. Determinare autovalori e autospazi delle seguenti matrici reali, dire se sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare una matrice M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia diagonale:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Gli esercizi contrassegnati con gli asterischi sono per chi non ha superato il primo esonero e per chi ha intenzione di sostenere direttamente l'appello)

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

ESERCIZI DI RIEPILOGO

1. Determinare dimensioni e basi di $U, W, U+W, U \cap W$.

   (a) $U =< (1,3,2),(1,1,1),(3,1,4) >$, $W =< (0,1,2),(1,0,0),(2,1,1) >$

   (b) $U =< (2,1,1),(0,-1,-4),(2,\frac{1}{2},-1) >$, $W =< (4,1,-2),(0,-3,-12),(2,0,-3) >$

   (c) $U =< (1,0,1,2),(1,1,1,1),(-1,-2,-1,0) >$, $W =< (0,1,0,1),(0,0,0,1),(1,0,1,1) >$

2. Discutere i seguenti sistemi al variare del parametro k.

   (a)
   $$\begin{cases} x+ky=1 \\ (1-k)x-(2+k)y+z=8 \\ x+z=4 \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} x+(2-k)y+kz=1 \\ (2-k)x+ky+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

3. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

   (a) Sia r la retta di equazioni cartesiane
   $$r = \begin{cases} x+y+2=0 \\ y+2z+1=0 \end{cases}$$
   Determinare le equazioni parametriche di r.

   (b) Sia s la retta di equazioni cartesiane
   $$s = \begin{cases} 2x+y=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$$
   Dire se r ed s sono sghembe, parallele o incidenti, in caso di incidenza determinarne il punto di intersezione.

   (c) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta t complanare con r ed s e passante per il punto $P=(1,1,1)$.

   (d) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta u parallela al vettore $\mathbf{w}=(1,0,1)$ e passante per il punto $Q=(1,-1,1/3)$. Dire se le rette t ed u sono sghembe, parallele o incidenti, in caso di incidenza determinarne il punto di intersezione.

4. Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e determinare nucleo, immagine e le rispettive dimensioni.

(a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $F(x, y, z) = (\frac{x}{3} + y + 2z, \frac{x}{4} + y + z, -y + 2z)$

(b) $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $G(x, y, z) = (x + 6y + z, \frac{x}{6} + 7y + z, 6x + 6y + 2z)$

(c) $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ t.c.
$H(x, y, z, w) = (\frac{x}{2} - \frac{3z}{2} + \frac{w}{2}, 2x + y + w, 3y + 2z + w, 2x + 8y + 6z + 3w)$

5. Sia $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ lo spazio affina di dimensione n. Determinare le formule di cambiamento di coordinate affini dal sistema di riferimento affine standard $O, e_1, \ldots, e_n$ al sistema di riferimento $O^l, f_1, \ldots, f_n$:

   (a) $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ $O^l = (1, -1), f_1 = (1, -2), f_2 = (2, 1)$

   (b) $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ $O^l = (2, 0, 1), f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (0, 1, 1), f_3 = (0, 1, 0)$

   (c) $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ $O^l = (1, 1, 1), f_1 = (1, 2, 2), f_2 = (2, 1, 0), f_3 = (1, 0, 1)$

6. Dire se le seguenti applicazioni sono diagonalizzabili; quando possibile determinare una base di autovettori $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ e scrivere la formula di passaggio da $M_e(F)$ a $M_b(F)$ dove $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ é la base canonica, verificando che $M_b(F)$ é diagonale.

   (a) $F(x, y, z) = (x + y + z, y, 2x + y + 2z)$

   (b) $F(x, y, z) = (y + \frac{3z}{2}, \frac{x}{2} + y + \frac{3z}{2}, -\frac{x}{2})$

   (c) $F(x, y, z) = (-x + y + z, 2x - 2y - 2z, -\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3})$