Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 1 (21 Febbraio 2008)
Spazi vettoriali, somme e prodotti di matrici

1. Per la definizione di spazio vettoriale e il caso di K^n si può consultare il Sernesi alle pagine 17 e 18 (definizione 1.1 e esempio 1.2.1). Una dimostrazione delle proprietà di spazio vettoriale verrà anche data, in un caso più generale, nell'esercizio seguente.

2. Dimostriamo che l'insieme A rispetta tutte le proprietà degli spazi vettoriali.
Proprietà associativa (SV1 secondo la notazione del Sernesi): $(f+g)(x)+h(x) = \big(f(x)+g(x)\big)+h(x) =$ (per la proprietà associativa della somma nel campo) $= f(x)+\big(g(x)+h(x)\big) = f(x)+(g+h)(x)$.
Esistenza dello zero (SV2): basta prendere la funzione identicamente nulla.
Esistenza dell'opposto (SV3): per ogni $f(x)$ basta considerare $-f(x)$.
Proprietà commutativa (SV4): deriva direttamente dalla commutatività della somma in un campo.
Proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori (SV5): $k\cdot\big((f+g)(x)\big) = k\cdot\big(f(x)+g(x)\big) = k\cdot f(x)+k\cdot g(x) = (k\cdot f)(x)+(k\cdot g)(x)$.
Proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari (SV6): deriva direttamente dalla proprietà distributiva nel campo.
SV7: deriva direttamente dall'associatività del prodotto nel campo.
SV8: ovvia.
(si noti che per $X=\{1,2\dots n\}$ si ottiene lo spazio vettoriale K^n e per $X=\mathbb{N}$ si ottengono le successioni di elementi di K)

3. Le proprietà SV1, SV2, SV3, SV4 valgono perché H, essendo un campo, sarà necessariamente un gruppo abeliano rispetto all'addizione.
Le proprietà SV5 e SV6 derivano dalla proprietà distributiva rispetto alle operazioni definite sul campo, la SV7 dall'associatività del prodotto sul campo e la SV8 dal fatto che l'unità moltiplicativa di K è la stessa di H.

4. Essendo ${}^t(A\cdot B) = {}^tB\cdot{}^tA$, ponendo $B={}^tA$ si ha che ${}^t(A\cdot{}^tA) = {}^t({}^tA)\cdot{}^tA = A\cdot{}^tA$.
Inoltre, poiché ${}^t(A+B) = {}^tA+{}^tB$, abbiamo che ${}^t(A+{}^tA) = {}^tA+{}^t({}^tA) = {}^tA+A = A+{}^tA$ e inoltre che ${}^t(A-{}^tA) = {}^tA-{}^t({}^tA) = -(A-{}^tA)$.
Notiamo infine che $A = \frac{1}{2}\cdot(A+{}^tA)+\frac{1}{2}\cdot(A-{}^tA)$, con $\frac{1}{2}\cdot(A+{}^tA)$ simmetrica e $\frac{1}{2}\cdot(A-{}^tA)$ antisimmetrica.

5. $A^2-\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$(A+\mathbb{I}_3)(A-2\mathbb{I}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$$({}^tA)^2 + {}^tA = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

6. $A^2 + iA + i\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 2+2i & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   $A^3 - 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   ${}^tA \cdot A + {}^tA + A = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix}$

7. La matrice $A \cdot B$ è una matrice 4×4, e non può quindi essere moltiplicata per C, che è 3×3; inoltre, la matrice ${}^tB$ è 4×3 e quindi non può essere moltiplicata per A, che è anch'essa 4×3. Ciò equivale a dire che la prima e la quinta operazione tra matrici sono irrealizzabili. Le altre invece danno i seguenti risultati:

   $C \cdot B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   $C + (B \cdot A) = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   $(A + {}^tB) \cdot C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   ${}^tA + B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 2 (28 Febbraio 2008)
Sistemi lineari e matrici inverse

1. (a) $\exists!$ soluzione: $(-\frac{31}{6}, \frac{5}{3}, \frac{7}{12})$
   (b) Il sistema è incompatibile
   (c) Il sistema è incompatibile
   (d) $\exists\ \infty^2$ soluzioni del tipo $(u-t+5, t, u-2t+6, u)$
   (e) $\exists!$ soluzione: $(0,0,0,0)$
   (f) $\exists\ \infty^1$ soluzioni del tipo $(-\frac{5}{4}t+\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}t, t)$
   (g) $\exists\ \infty^1$ soluzioni del tipo $(2-6t, t, t)$
   (h) $\exists!$ soluzione: $(3,1,-1)$
   (i) $\exists\ \infty^1$ soluzioni del tipo $(t, \frac{t}{3}+2, \frac{t}{3}-1, \frac{2}{3}t+2)$
   (j) $\exists!$ soluzione: $(1,-1,-2,0)$

2. Consideriamo la sequenza di n operazioni elementari sulle righe che trasforma $(M|\mathbb{I}_n)$ in $(\mathbb{I}_n|N)$; poiché ad ogni operazione elementare sulle righe corrisponde la moltiplicazione a sinistra per una matrice elementare, se $E_1, \dots, E_n$ sono le matrici corrispondenti a tali operazioni, abbiamo che $E \cdot (M|\mathbb{I}_n) = (\mathbb{I}_n|N)$, dove $E = E_n \cdot \dots \cdot E_1$. Ricordandoci che $A \cdot (B|C) = (A \cdot B|A \cdot C)$, abbiamo che $EM = \mathbb{I}_n$ e $E = N$, quindi $NM = \mathbb{I}_n$, ovvero $N = M^{-1}$. Procedendo con questo metodo possiamo calcolarci l'inversa delle matrici A, B, C e D, e si ha:
   Calcoliamo l'inversa di A:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{1,2}(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{2,1}(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{1,2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
   Calcoliamo l'inversa di B:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{1,2}(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{2}(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{2,1}-1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
   Calcoliamo l'inversa di C:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{1}(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{2,1}(5)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{2}(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & -1 \end{array}\right)$$
   Calcoliamo l'inversa di D:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{3,1}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{2,3}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{2}(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{1,2}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{3,2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R}_{3,2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Le matrici ottenute sono quindi:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. Se A è una matrice invertibile si ha $\mathbb{I}_n = {}^t\mathbb{I}_n = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA$. Quindi, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. Inoltre, poiché $A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n = {}^tA \cdot {}^t(A^{-1})$, se $A = {}^tA$ allora $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

4. $\Leftarrow$ Basta effettuare il prodotto di AA^{-1} per constatare che la matrice A è invertibile.

   $\Rightarrow$ Per ipotesi so che $\exists B \in M_n(\mathrm{K})$ t.c $BA = \mathbb{I}_n$, con B nella forma $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ ma allora esplicitando il prodotto AB ottengo che: $BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + \ldots + b_{1n}a_{n1}, & \dots & , b_{11}a_{1n} + \ldots + b_{1n}a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + \ldots + b_{nn}a_{n1} & \dots & b_{n1}a_{1n} + \ldots + b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} =$

   $BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & \dots & \dots & b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} & b_{22}a_{22} & \dots & b_{2n}a_{nn} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} & \dots & \dots & b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$ proprio per come è definita A. Ma allora è facile vedere che $b_{ij}a_{jj} = \delta_{ij}$ con $i, j = 1 \ldots n$, dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker (vale 1 se $i = j$, vale 0 se $i \neq j$). Da ciò si deduce che se esistesse almeno un $a_{jj} = 0$ la matrice A non sarebbe invertibile.

   In conclusione ho che $b_{jj}a_{jj} = 1, \forall j = 1 \ldots n$ mentre il resto dei coefficienti della matrice BA è uguale a 0, ma allora $b_{jj} = (a_{jj})^{-1}$ e $b_{ij} = 0$ (se $i \neq j$) che è proprio ciò che si voleva dimostrare.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 3 (6 Marzo 2008)
Sottospazi vettoriali, generatori, dipendenza lineare, basi

1. (a) $\exists!$ soluzione: $(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8})$
   (b) $\exists\ \infty^2$ soluzioni del tipo $(u - 4t + 2, 2u + \frac{3}{4}, u, t)$
   (c) $\exists!$ soluzione: $(\frac{7}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{3}{32})$
   (d) $\exists!$ soluzione: $(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

2. Mostriamo innanzi tutto che $K[X]$ è uno spazio vettoriale su K: è un sottoinsieme di $A := \{f : K \to K\}$ che, come abbiamo visto nel primo tutorato, è uno spazio vettoriale; inoltre, moltiplicando un polinomio per uno scalare o sommando due polinomi si ottiene sempre un polinomio, quindi $K[X]$ è un sottospazio di A, cioè è a sua volta uno spazio vettoriale.
   Per mostrare che $K[X]$ non ha dimensione finita, notiamo innanzitutto che se una esistesse una base finita di dimensione n, qualsiasi insieme di n vettori indipendenti genererebbe lo spazio. Consideriamo quindi l'insieme $\{1, X, X^2, \dots, X^n\} \in K[X]$; si tratta di vettori linearmente indipendenti: infatti, per il principio di identità dei polinomi, $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i$ e quindi, se $K[X]$ avesse una base finita, esisterebbe un n tale che quell'insieme è una base. Tuttavia, per ogni n si ha che X^{n+1} non è combinazione lineare di quei vettori; infatti, se così non fosse, per opportuni a_i si avrebbe che $X^{n+1} = a_nX^n + \dots + a_1X + a_0 = 0$, che contraddice il suddetto principio d'identità dei polinomi. Quindi $K[X]$ non ha dimensione finita.
   Mostriamo che Π_n è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare: $(a_0 + a_1X + \dots a_nX^n) + (b_0 + b_1X + \dots b_nX^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots (a_n + b_n)X^n$, $k \cdot (a_0 + a_1X + \dots a_nX^n) = (k \cdot a_0) + (k \cdot a_1)X + \dots (k \cdot a_n)X^n$.
   Si ha poi che l'insieme $\{1, X, X^2, \dots X^n\}$ è una base di Π_n: infatti, ogni polinomio del tipo $a_0+a_1X+\dots a_nX^n$ ha coordinate $(a_0, a_1, \dots a_n)$ rispetto a questi vettori (la loro indipendenza è stata vista in precedenza). Poiché questa base ha $n + 1$ elementi, $\dim \Pi_n = n + 1$.

3. Innanzi tutto, notiamo che $\mathbb{Q}(i)$ e $\mathbb{R}$ sono due campi contenenti $\mathbb{Q}$ e quindi, per quanto visto al primo tutorato, sono entrambi dei $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali. Cerchiamo ora la loro dimensione:

   (a) L'insieme $\{1, i\}$ è una base di $\mathbb{Q}(i)$ (si verifica immediatamente sia che generano lo spazio sia che sono indipendenti). Quindi, $\mathbb{Q}(i)$ ha dimensione 2.

   (b) Consideriamo l'insieme $\{1, \pi, \pi^2, \dots, \pi^n\}$: si tratta di vettori linearmente indipendenti, in quanto $a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i$, in quanto π è trascendente; quindi, per quanto osservato nel primo esercizio, se $\mathbb{R}$ avesse dimensione finita, esisterebbe un n per cui quell'insieme è un sistema di generatori. Tuttavia, notiamo che π^{n+1} non appartiene al sottospazio generato da quei vettori: infatti, se vi appartenesse, per opportuni a_i si avrebbe che $\pi^{n+1} = a_n\pi^n + \cdots + a_1\pi + a_0 \Leftrightarrow$, che contraddice la suddetta trascendenza di π. Quindi $\mathbb{R}$ non ha dimensione finita su $\mathbb{Q}$.

4. (a) È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

   (b) NON è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché, ad esempio, contiene $(1,0,0)$ ma non $(2,0,0)$.

   (c) Notiamo che se $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b$, quindi il sottoinsieme si può riscrivere come $\{(x,y,z) : x = 0, y = 0\}$ e quindi, essendo l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, è un sottospazio vettoriale.

   (d) NON è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché, ad esempio, contiene $(1,0,0)$ ma non $(2,0,0)$.

   (e) È un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

   (f) NON è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché, ad esempio, contiene $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ ma non $(1,0,1)$.

5. (a) Verifichiamo l'indipendenza lineare dei vettori: cerchiamo una combinazione lineare del tipo $a(1,-1,2) + b(1,-2,1) + c(0,1,0) = 0$, ovvero $\begin{cases} a + b = 0 \\ -a - 2b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$; poiché l'unica soluzione di questo sistema è $(0,0,0)$, si ha che l'unica combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 che da il vettore nullo ha tutti i coefficienti nulli, quindi i vettori sono linearmente indipendenti. Essendo 3 vettori indipendenti, costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Per trovare una combinazione lineare che che dia come risultato $a(1,-1,2) + b(1,-2,1) + c(0,1,0) = (1,1,1)$, consideriamo il sistema $\begin{cases} a + b = 1 \\ -a - 2b + c = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$. L'unica soluzione è $(0,1,3)$, quindi $(1,1,1) = v_2 + 3v_3$.

   (b) Sono linearmente dipendenti e quindi, essendo 3, non generano $\mathbb{R}^3$. Si ha $v_3 = \frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{2}v_2$, ma $(1,1,1) \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

   (c) Sono più di 3 vettori, quindi sono linearmente dipendenti; per verificare se generano $\mathbb{R}^3$, proviamo a scrivere un generico vettore $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ come combinazione lineare dei vettori $(x,y,z) = a(1,0,1) + b(-1,-2,-2) + c(1,2,1) + d(0,2,2)$, ovvero $\begin{cases} a - b + c = x \\ -2b + 2c + 2d = y \\ a - 2b + c + 2d = z \end{cases}$; poiché questo sistema ha soluzioni per qualsiasi valore di (x,y,z) (che considereremo parametri nella risoluzione del sistema), abbiamo che ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei nostri 4 vettori di partenza, che quindi sono un sistema generatori. Si ha inoltre che $v_2 = -\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_3 - \frac{1}{2}v_4$, inoltre $(1,1,1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3$.

(d) Sono meno di 3 vettori, quindi non possono generare $\mathbb{R}^3$, ma sono linearmente indipendenti. Inoltre, si ha $(1, 1, 1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 4 (13 Marzo 2008)
Rango, dimensione, basi, formula di Grassmann

1. (a) Generano $\mathbb{R}^2$
   (b) Non generano $\mathbb{R}^2$
   (c) Non generano $\mathbb{R}^3$
   (d) Generano $\mathbb{R}^3$

2. (a) $\dim(U) = 2$ perché $(1,1,0) = 2\cdot(1,0,1) - (1,-1,2)$ e $\dim(W) = 2$ perché $(1,2,0) = (1,1,1) - (0,-1,1)$; le rispettive basi saranno dunque $\{(1,0,1),(1,-1,2)\}$ e $\{(1,1,1),(0,-1,1)\}$. Noto inoltre che l'insieme dei generatori di U e di W ha rango 3, quindi $\dim(U + W) = 3$, ovvero $U + W=\mathbb{R}^3$. Per la formula di Grassmann ho che $\dim(U \cap W) = 1$, e per trovarmi una base cerco i valori a, b, c, d per cui si ha $a\cdot(1,0,1) + b\cdot(1,-1,2) = c\cdot(1,1,1) + d\cdot(0,-1,1)$, cioè $a\cdot(1,0,1) + b\cdot(1,-1,2) - c\cdot(1,1,1) - d\cdot(0,-1,1) = 0$, ovvero $\begin{cases} a+b-c=0 \\ -b-c+d=0 \\ a+2b+c-d=0 \end{cases}$. Le soluzioni di questo sistema sono $\{a = k, b = -k, c = 0, d = -k\}$, quindi i vettori di $(U \cap W)$ sono del tipo $k\cdot(1,0,1) - k\cdot(1,-1,2) = -k\cdot(0,-1,1)$, e per trovare una base basterà fissare un valore di k diverso da 0, per esempio 1, quindi $(U \cap W) = \langle(0,1,-1)\rangle$.
   (b) $U = \mathbb{R}^3$, $W = \langle(1,-1,1),(0,3,0)\rangle$, perché $(3,0,3) = 3\cdot(1,-1,1) + (0,3,0)$, quindi si avrà $U + W = U = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W = W$.
   (c) $U = \langle(1,1,0,1),(1,0,1,1)\rangle$, perché $(0,1,-1,0) = (1,1,0,1)-(1,0,1,1)$, $\dim(W) = 3$, $U + W = \mathbb{R}^4$, $U \cap W = \langle(7,4,3,7)\rangle$.
   (d) $U = \langle(1,1,0,0),(0,0,1,1)\rangle$, perché $(3,3,-2,-2) = 3\cdot(1,1,0,0) - 2\cdot(0,0,1,1)$, $W = \langle(1,2,1,2),(1,2,1,1)\rangle$, perché $(2,4,2,3) = (1,2,1,2)+(1,2,1,1)$, $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

3. (a) Una base per il sottospazio è $\{(1,2,3),(0,-1,-1)\}$. Per poter completare questo insieme ad una base di $\mathbb{R}^3$, basta trovare un vettore linearmente indipendente con quei due (ne basta uno solo perché $\dim\mathbb{R}^3 - \dim V = 1$). Per semplificarci i calcoli, possiamo sceglierlo tra quelli della base canonica. (Siamo sicuri che almeno un vettore della base canonica non stia in V, perché se così non fosse avremmo che V contiene la base canonica e quindi anche tutto $\mathbb{R}^3$). Troviamo che $e_1 = (1,0,0)$ va bene, quindi la base di V può essere completata con $(1,0,0)$. (Si noti che questo non è l'unico completamento possibile: andavano bene, ad esempio, anche e_2 oppure e_3)
   (b) Una base del sottospazio è $\{(1,1,-2),(1,-1,2)\}$, e si può completare con $(0,1,0)$.

(c) Base: $\{(-1,0,-1,-2),(1,1,1,2)\}$, si può completare con $\{(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}$.

(d) I vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^4$.

4. $r(A)=3 \qquad r(B)=2 \qquad r(C)=2 \qquad r(D)=2$

$r(A{\cdot}B)=2 \qquad r(B{\cdot}C)=r\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=1 \qquad r(C{\cdot}D)=r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}=$

$2 \qquad r(D\cdot A)=2$

Si noti che, per calcolare $r(A\cdot B)$ e $r(D\cdot A)$ non è stato necessario esplicitare il prodotto: è sufficiente sapere che se $A\in GL_m(K)$, $B\in M_{m,n}(K)$ e $C\in GL_n(K)$, allora $r(A\cdot B)=r(B)=r(B\cdot C)$.

5. Chiamiamo A il vettore colonna $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ e B il vettore riga $(b_1,\ldots,b_m)$

$\Leftarrow$ A e B hanno rispettivamente una sola colonna e una sola riga, quindi hanno entrambi rango 1. Di conseguenza, essendo $r(A{\cdot}B)\le min(r(A),r(B))$, si avrà $r(A\cdot B)\le 1$

$\Rightarrow$ Se $r(M)=0$, M è la matrice nulla quindi basterà prendere come A il vettore nullo e come B un vettore qualsiasi (o viceversa). Se $r(M)=1$, tutte le colonne di M sono multipli di una sola colonna non nulla, diciamo la k-esima. Avremo quindi che $M_{(i)}=c_i\cdot M_{(k)}$, per ogni $i=1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,m$ e per opportuni scalari c_i. Scegliendo quindi $A=M_{(k)}$ e $B=(c_1\ldots\underbrace{1}_{k}\ldots c_m)$ si ha l'asserto.

6. Dando per buono il suggerimento, rimane quindi da dimostrare che la somma è diretta $\Leftrightarrow v_1,v_2\ldots v_n$ sono linearmente indipendenti. Dimostriamolo per induzione.

$n=2$ $\Rightarrow$ Suppongo $\langle v_1\rangle\oplus\langle v_2\rangle$, allora $\langle v_1\rangle\cap\langle v_2\rangle=\{0\}$, quindi $a\cdot v_1=b\cdot v_2\Rightarrow a=0=b$, ma allora $a\cdot v_1-b\cdot v_2=0\Rightarrow a=0=-b$, cioè v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti

$\Leftarrow$ Suppongo v_1 e v_2 linearmente indipendenti. Allora $a{\cdot}v_1+b{\cdot}v_2=0\Rightarrow a=0=b$, quindi $a\cdot v_1=-b\cdot v_2\Rightarrow a=0=-b$, quindi $v=a\cdot v_1+b\cdot v_2\Rightarrow v=0$, cioè $\langle v_1\rangle\oplus\langle v_2\rangle$.

$n\ge 3$ $\Rightarrow$ Suppongo $(\langle v_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle v_{n-1}\rangle)\oplus\langle v_n\rangle$ e mostro che $v_1\ldots v_{n-1},v_n$ sono indipendenti. Considero la combinazione lineare $a_1\cdot v_1+\ldots a_{n-1}\cdot v_{n-1}+a_n\cdot v_n=0$. Se $a_n\ne 0$, si avrebbe $v_k=-\frac{1}{a_n}(a_1\cdot v_1+\ldots a_{n-1}\cdot v_{n-1})$, che contraddice l'ipotesi. Dev'essere quindi $a_n=0$, e si ha quindi $a_1\cdot v_1+\ldots a_{n-1}\cdot v_{n-1}=0$, ma poiché $v_1\ldots v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti per ipotesi induttiva, tutti gli $a_1\cdot a_{n-1}$ sono nulli e quindi $v_1\ldots v_n$ sono linearmente indipendenti.

$\Leftarrow$ Suppongo $v_1\ldots v_{n-1},v_n$ linearmente indipendenti e mostro che la somma è diretta. Per ipotesi induttiva si ha $\langle v_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle v_{n-1}\rangle$, resta quindi da mostrare che $\langle v_n\rangle\cap(\langle v_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle v_{n-1}\rangle)=\{0\}$. Sia $v\in(\langle v_n\rangle\cap\langle v_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle v_{n-1}\rangle)$, allora $v=a_n\cdot v_n=a_1\cdot v_1+$

$\dots a_{n-1} \cdot v_{n-1} \Rightarrow a_1 \cdot v_1 + \dots a_{n-1} \cdot v_{n-1} - a_n \cdot v_n = 0$, e per l'indipendenza lineare $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0 = -a_n$, quindi $v = 0$, cioè $\langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_{n-1} \rangle \oplus \langle v_n \rangle$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 5 (27 Marzo 2008)
Rango, determinante, matrici inverse, discussione di sistemi

1. Denotiamo con A la matrice dei coefficienti del sistema, con c la colonna dei coefficienti e con $(A|c)$ la matrice orlata

   (a) Troviamo che $\det(A) = a^2 - 2a$, quindi se $a \notin \{0, 2\}$ il sistema ha un'unica soluzione, ovvero $(\frac{a^3-2a^2-2a+3}{a^2-2a}, \frac{a-3}{a^2-2a}, \frac{1}{a^2-2a})$. Tuttavia, $r(A|c) = 3$ anche se $a \in \{0, 2\}$, quindi per questi due valori il sistema non ha soluzioni

   (b) $\det(A) = 1-a^2$, quindi se $a \neq \pm 1$ il sistema ha un'unica soluzione che è $(1, -a, 0)$; se invece $a = \pm 1$, si ha che $r(A) = 2 = r(A|c)$, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni: se $a = 1$ le soluzioni sono $(-t-1, -1, t), t \in \mathbb{R}$, se $a = -1$ sono $(t - 1, 1, t)$.

   (c) $\det(A) = 2a - 5$, quindi se $a = \frac{5}{2}$, il sistema ha ∞^1 soluzioni del tipo $(t, 2 - \frac{7}{2}t, \frac{3}{2}t - 3)$. Altrimenti, l'unica soluzione è $(0, 2, 3)$.

   (d) $\det(A) = a^3 - 3a + 2$, quindi se $1 \neq a \neq -2$ il sistema ha un'unica soluzione, ovvero $(\frac{2a+3}{a+2}, \frac{a+1}{a+2}, -\frac{1}{a+2})$; se invece $a = 1$, il sistema è costituito da tre equazioni identiche e quindi ci sono ∞^2 soluzioni del tipo $(2 - s - t, s, t)$, con s e t parametri reali; infine, se $a = -2$ il sistema è incompatibile.

   (e) $\det(A) = 2a - 2$, quindi se $a \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione, cioè $(\frac{5-3a}{a-1}, \frac{1}{1-a}, \frac{a-2}{a-1})$; altrimenti è incompatibile.

   (f) $\det(A) = a^2 - 4$, quindi se $a \neq \pm 2$ il sistema ha un'unica soluzione, cioè $(\frac{a-2}{a+2}, \frac{4}{a+2}, \frac{a-2}{a+2})$; se $a = 2$, le soluzioni sono ∞^1 del tipo $(-t, t + 1, t)$, se $a = -2$ il sistema non ha soluzioni.

2. Si trova che $\det(A) = 0, \forall b \in \mathbb{R}$, quindi A non è mai invertibile. Per trovare una matrice M tale che $A \cdot M = 0$, utilizziamo l'identità $A \cdot {}^t cof(A) = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n$: se A non è invertibile, il membro a destra dell'uguale è la matrice nulla, quindi basta prendere $M = {}^t cof(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -1 & 1-b^2 \\ b & 1 & b^2-1 \end{pmatrix}$.
   $\det(B) = -b^2 - b$, quindi A è invertibile $\Leftrightarrow b \notin \{-1, 0\}$. In questo caso abbiamo $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-b}{b} & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b+1} & \frac{1}{b+1} & 0 \\ -\frac{1}{b^2+b} & -\frac{1}{b^2+b} & -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$, altrimenti $M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   e $M_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   $\det(C) = 1, \forall b \in \mathbb{R}$, quindi C è sempre invertibile con $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & b+1 & b \end{pmatrix}$.

$\det(D) = -6b-1$, quindi D è invertibile $\Leftrightarrow b \neq -\frac{1}{6}$ e si ha $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2b}{6b+1} & \frac{-2}{6b+1} & \frac{2b+1}{6b+1} \\ \frac{-b}{6b+1} & \frac{1}{6b+1} & \frac{2b}{6b+1} \\ \frac{1}{6b+1} & \frac{6}{6b+1} & \frac{-2}{6b+1} \end{pmatrix}$ oppure $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Notiamo che la prima e la terza riga di A sono uguali, quindi $r(A) \leq 2 \forall c \in \mathbb{R}$. Inoltre, $a_{11} \neq 0$, quindi $r(A) \geq 1 \forall c \in \mathbb{R}$. Per stabilire quando il rango di A è 1 e quando è 2, calcoliamo i minori orlati a partire da a_{11}: abbiamo che $\det(A(12|12)) = c - c^2$ mentre gli altri minori sono sempre nulli, quindi il rango di A è massimo $\Leftrightarrow \det(A(12|12)) \neq 0 \Leftrightarrow c \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.
   $r(B) = 3 \Leftrightarrow c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Infatti, se $c = 0$ l'ultima riga è nulla quindi il rango non può essere massimo. Inoltre, $\det(B(123|123)) = -2c$, quindi se $c \neq 0$ abbiamo un minore non nullo di ordine 3.
   $\det(C) = c^2 + 3c + 4$, che è un polinomio irriducibile su $\mathbb{R}$, quindi $\det(C) \neq 0 \forall c \in \mathbb{R}$ cioè C ha sempre rango 4.
   Notiamo che D è ottenuta da ${}^tB$ scambiando le righe, quindi $r(D) = r({}^tB) = r(B)$, cioè rango massimo $\Leftrightarrow c \neq 0$.

4. (a) Falsa. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A + B = \mathbb{I}_2$, $r(A) = 1 = r(B)$ ma $r(A+B) = 2$.

   (b) Falsa. Controesempio: A e B come sopra, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r(A \cdot B) = 0$

   (c) Vera. Dimostrazione: Se $r(A) = n = r(B)$, A e B sono invertibili e quindi abbiamo $r(A \cdot B) \leq r(A)$ (vero sempre), e inoltre $r(A) = r(A \cdot B \cdot B^{-1}) \leq r(A \cdot B)$, quindi $r(A \cdot B) = r(A) = n$.

   (d) Vera. Dimostrazione: Se $r(A) < n$ e $r(B) < n$, ovviamente si avrà $min(r(A), r(B)) < n$, ma essendo $r(A \cdot B) \leq min(r(A), r(B))$ avremo che $r(A \cdot B) \leq min(r(A), r(B)) < n$, ovvero $r(A \cdot B) < n$.

   (e) Falsa. Controesempio: A e B come nei primi due controesempi, si ha $\det(A) = 0 = \det(B)$ ma $\det(A+B) = 1$.

   (f) Falsa. Controesempio: $A = \mathbb{I}_2$, $k = 2$, $k \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; si ha $\det(A) = 1$ ma $\det(k \cdot A) = 4 \neq 2 \cdot \det(A)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 6 (3 Aprile 2008)
Esercizi di preparazione al primo esonero

1. (a) Se $k = 0$, abbiamo che $\dim U = 1 = \dim W$, altrimenti $\dim U = 2 = \dim W$. Nel primo caso, poiché $\dim U + \dim W < 3$, $U + W \neq \mathbb{R}^3$, mentre nel secondo caso il rango dei generatori è 3, quindi $U + W = \mathbb{R}^3$. Questa somma non può essere diretta, perché per la formula di Grassmann abbiamo $\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim U + W = 1$.
   (b) $\dim(U) = 2, \forall k \in \mathbb{R}$, mentre W ha dimensione $2 \Leftrightarrow k \neq 3$, altrimenti 1. I generatori dei due spazi hanno rango $3 \Leftrightarrow k \neq 3$, quindi in questo caso $U + W = \mathbb{R}^3$, ma la somma non è diretta (per Grassmann).
   (c) $\dim U = 3 \Leftrightarrow k \notin \{0, 1\}$, altrimenti $\dim U = 2$, mentre W ha sempre dimensione 2. $U + W = \mathbb{R}^4, \forall k \in \mathbb{R}$, e la somma è diretta $\Leftrightarrow k \in \{0, 1\}$.
   (d) $\dim(U) = 2 \Leftrightarrow k \neq \pm 1$, altrimenti $\dim U = 1$, mentre W ha sempre dimensione 2. $U + W = \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow k \neq \pm 1$, e la somma è sempre diretta.

2. (a) $\exists \infty^1$ soluzioni: $(6 - t, t, 1), t \in \mathbb{R}$.
   (b) $\exists!$ soluzione: $(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
   (c) $\exists \infty^1$ soluzioni: $(1 - t, 0, 1 - t, 1), t \in \mathbb{R}$.
   (d) Il sistema è incompatibile

3. Come nel precedente tutorato, chiameremo A la matrice dei coefficienti del sistema, con c la colonna dei coefficienti e $(A|c)$ la matrice orlata

   (a) $\det(A) = m^2 - m$, quindi se $0 \neq m \neq 1$ la soluzione è unica, ed è $(2, -\frac{1}{m}, -\frac{1}{m})$; se $m = 0$, $(A|c)$ ha rango massimo quindi non ci sono soluzioni e se invece $m = 1$, $r(A|c) = 2$ e quindi ci sono ∞^1 soluzioni del tipo $(t, 1 - t, -1)$ con t parametro reale.
   (b) $\det(A) = m^3 - m$, quindi se $0 \neq m \neq \pm 1$ si ha l'unica soluzione $(\frac{1}{1-m^2}, \frac{m^2+m-1}{m^2-1}, \frac{m^2}{1-m^2})$, se $m = 0$ ci sono le ∞^1 soluzioni del tipo $(1, 1, t)$ e se $m = \pm 1$ non ci sono soluzioni.
   (c) $\det(A) = 2m^2 - 16m + 18 = 2(m - 3)^2$, quindi se $m \neq 3$ si ha l'unica soluzione $(3, 0, -1)$; se invece $m = 3$ si ha $r(A) = r(A|c) = 1$, quindi le soluzioni sono ∞^2, del tipo $(-2t - 3s, t, s)$.
   (d) $\det(A) = 0$ e $r(A) = 2$ perché $\det(A(12|12)) = -3$; questo è valido ovviamente per qualsiasi valore di m, perché il parametro compare solo nella colonna c. Inoltre, si ha che $\det(A|c(123|124)) = -3m - 3$, quindi per il principio dei minori orlati $r(A) = r(A|c) \Leftrightarrow m \neq -1$, quindi il sistema è compatibile solo se $m = -1$ e ha le ∞^1 soluzioni $(\frac{2}{3}t - \frac{1}{3}, \frac{8}{3}t + \frac{5}{3}, t)$.

4. La matrice A è invertibile $\Leftrightarrow h \neq \pm 1$, e in questo caso si ha $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h+1} & \frac{h}{h^2-1} & \frac{1}{2-2h^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2h-2} \\ \frac{1}{h+1} & \frac{1}{1-h^2} & \frac{1}{2-2h^2} \end{pmatrix}$. Se $h = 1$, $r(A) = 1$, se $h = -1$, $r(A) = 2$.
   La matrice B non è invertibile per alcun valore di h. Se $b = -1$, $r(B) = 1$, altrimenti $r(B) = 2$.

   La matrice C è invertibile $\Leftrightarrow 0 \neq h \neq 3$, con inversa $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2-3h} & \frac{1}{3-h} & \frac{h-2}{h^2-3h} \\ \frac{h-1}{h^2-3h} & \frac{2}{3-h} & \frac{2}{3h-h^2} \\ \frac{1}{3-h} & \frac{h}{h-3} & \frac{1}{3-h} \end{pmatrix}$,
   negli altri casi ha rango 2.

   La matrice D è invertibile $\Leftrightarrow h \neq 0$, con inversa $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} & -\frac{3}{2h} \\ 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{2h} \end{pmatrix}$;
   se $h = 0$, D è la matrice nulla quindi ha rango 0.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 7 (17 Aprile 2008)
Spazi affini, punti e rette nel piano affine

1. (a) Affinché A, B e C siano allineati, deve essere $\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BC}\end{pmatrix} = 0$, quindi abbiamo che $0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, quindi i punti non sono allineati.

   (b) $\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BC}\end{pmatrix} = 0$, quindi i punti sono allineati. Per trovare la retta che li contiene, notiamo innanzi tutto che se tre punti sono allineati è sufficiente considerare la retta che ne contiene due qualunque distinti; chiamati questi punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, basta imporre che per qualsiasi punto (x, y) sulla retta i vettori $(x-x_1, y-y_1)$ e (x_2-x_1, y_2-y_1) siano allineati, ovvero: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$; in questo caso, prendendo $P_1 = A$ e $P_2 = B$ troviamo che per la retta è $2y-3x+2 = 0$.

   (c) Allineati per $k = \pm 1$, per $k = 1$ la retta è $x - y = 0$, per $k = -1$ è $x + y = 0$.

2. (a) Per trovare l'equazione parametrica, è sufficiente scrivere $\begin{cases} x = x_P + x_v t \\ y = y_P + x_v t \end{cases}$, dove (x_P, y_P) sono le coordinate del punto P e (x_v, x_v) quelle di v, quindi in questo caso $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \end{cases}$. Per l'equazione cartesiana invece bisogna imporre il determinante $\begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P \\ x_v & x_v \end{vmatrix} = 0$, e in questo caso $\begin{vmatrix} x-2 & y \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x - y + 2 = 0$, cioé $x + y - 2 = 0$.

   (b) Equazione parametrica: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \end{cases}$, equazione cartesiana: $y + 1 = 0$.

   (c) $P = (1, 0)$, equazione parametrica: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3t \end{cases}$, equazione cartesiana: $3x - 4y - 3 = 0$. (Si noti che un vettore parallelo a $(400, 300)$ è parallelo anche a $(4, 3)$)

3. (a) Per verificare la reciproca posizione tra le due rette nel piano affine, calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti. Si ha $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, quindi le rette sono incidenti, e risolvendo il sistema si trova che il loro punto comune è $P(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

(b) Passando all'equazione cartesiana di s, notiamo che questa coincide con quella di r, quindi le due rette sono parallele e coincidenti.

(c) Notiamo che le due rette hanno gli stessi coefficienti direttori, quindi sono parallele; tuttavia, l'origine degli assi $O = (0, 0)$ appartiene a r ma non ad s (si verifica immediatamente), quindi le due rette sono distinte.

4. Notiamo innanzi tutto che $\Phi : \lambda x + \mu y = 0$, con λ e μ parametri omogenei

   (a) Per trovare P cerchiamo la soluzione del sistema $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ e troviamo $P = (-\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$.

   (b) Considerando l'equazione di Φ e imponendo il passaggio per P si trova $\lambda = 7$, $\mu = 1$ (si noti che andava bene anche una qualsiasi altra coppia proporzionale a $(7, 1)$) e quindi l'equazione cartesiana di t è $7x + y = 0$. L'equazione parametrica invece è $\begin{cases} x = t \\ y = -7t \end{cases}$.

   (c) L'equazione del fascio Ψ è $7x + y + c = 0$ con c parametro reale. Imponendo il passaggio per $Q(1, 1)$ troviamo che $8 + c = 0$ quindi $c = -8$ e quindi l'equazione cercata è $7x + y - 8 = 0$.

   (d) Mettendo a sistema le equazioni cartesiane delle due rette si trova $R = (\frac{5}{9}, \frac{37}{9})$

5. (a) La retta contenente P e Q avrà come giacitura il sottospazio generato dal vettore $\overrightarrow{PQ} = (1, -\frac{1}{2})$, quindi conoscendo le coordinate di un suo punto (ad esempio P) possiamo scrivere l'equazione parametrica $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$; da questa possiamo ricavare l'equazione cartesiana procedendo come nell'esercizio 2: $0 = \begin{vmatrix} x & y - \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{2} - y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$

   (b) L'equazione del fascio Ψ è $\lambda(x - \frac{1}{2}) + \mu(y - \frac{1}{4}) = 0$; imponendo il passaggio per il punto $(1, \frac{1}{2})$ otteniamo $\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{4} = 0$; possiamo prendere $\lambda = 1$ e $\mu = -2$ e otteniamo la retta $x - 2y = 0$. (alternativamente, si poteva cercare la retta passante per i punti $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ e $(1, \frac{1}{2})$ e procedere come nell'esercizio precedente)

   (c) Se $r \cap s = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, allora ovviamente il punto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ apparterrà a r' e a s', quindi r' sarà la retta di Φ_r passante per $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ e s' la retta di Φ_s passante per $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. L'equazione di Φ_r è $x + 2y + c = 0$: imponendo il passaggio per $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ si trova $x + 2y - 2 = 0$; l'equazione della retta s' si troverà allo stesso modo: l'equazione di Φ_s è $x - 2y + c = 0$ e imponendo il passaggio per il punto si trova $x - 2y - 1 = 0$

6. Per mostrare che A è uno spazio affine su $\mathbb{R}$ è sufficiente trovare una funzione $f : A \times A \to \mathbb{R}$ che rispetti le proprietà SA1 e SA2. Una possibile funzione è la seguente: $f\big((x, x^2), (y, y^2)\big) \to y - x$. Mostriamo che valgono le due proprietà:

SA1 Verifichiamo che, fissato il primo punto $X = (x, x^2)$ e il vettore $v \in \mathbb{R}$, il punto $Y = (y, y^2)$ è univocamente determinato: $\overrightarrow{XY} = v \Rightarrow y - x = v \Rightarrow y = x + v$, quindi y è unico.

SA2 Consideriamo $X = (x, x^2)$, $Y = (y, y^2)$ e $Z = (z, z^2)$: si ha che $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = (y - x) + (z - y) = (z - x) = \overrightarrow{XZ}$

La dimostrazione che B è uno spazio affine è identica a questa.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 8 (24 Aprile 2008)
Spazi affini di dimensione 3 e applicazioni lineari

1. In generale si ha che tre punti $A, B, C \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sono allineati $\Leftrightarrow$

$$rg \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} \end{pmatrix} = 1$$

   (a) In questo caso abbiamo che $\overrightarrow{AB} = (-\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{2})$ e $\overrightarrow{BC} = (-5, -4, 1)$, ossia i vettori sono dipendenti. Possiamo quindi concludere che i punti sono allineati.

   (b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{BC} = (2, 0, 3)$, quindi i punti non sono allineati. Per scrivere l'equazione parametrica del piano che contiene i tre punti basta imporre che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l's \\ y = y_0 + mt + m's \\ z = z_0 + nt + n's \end{cases}$$

   dove (x_0, y_0, z_0) è un punto del piano e (l, m, n) e (l', m', n') sono una giacitura del piano. Quindi, in questo caso otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 - t + 2s \\ y = 1 \\ z = 1 + t + 3s \end{cases}$$

   Per ricavare l'equazione cartesiana del piano basta imporre che

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0$$

   In questo caso ricaviamo quindi

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2(y-1) + 3(y-1) = 5y - 5 = 0$$

   (c) $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$ e $\overrightarrow{BC} = (m, m+2, m+2)$, allora

$$rg \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & m+2 \end{pmatrix} = 0 \quad e \quad \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ m+2 & m+2 \end{pmatrix} = 0$$

   ossia se e soltanto se tutti i minori di ordine due sono uguali a zero. Dal sistema precedente otteniamo che i punti sono allineati

$\Leftrightarrow m = -1$. Per scrivere le equazioni del piano che contiene i tre punti imponiamo per comodità $m = 0$ e otteniamo che le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t + 2s \\ z = 1 - t + 2s \end{cases}$$

e quelle cartesiane

$$\det \begin{pmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2z - 2y = 0$$

(d) $\overrightarrow{AB} = (-m+2, 1, 1)$ e $\overrightarrow{BC} = (m-2, m+1, 1)$, allora

$$rg \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -m+2 & 1 \\ m-2 & m+1 \end{pmatrix} = 0 \quad e \quad \det \begin{pmatrix} -m+2 & 1 \\ m-2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dal sistema precedente si vede che non esistono valori di m tali che i tre punti siano allineati. Fissiamo nuovamente m=0 e otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 + 2t - 2s \\ y = -1 + t + s \\ z = -1 + t + s \end{cases}$$

e quelle cartesiane

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y+1 & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4z - 4y = 0$$

2. (a) Per trovare un vettore di direzione della retta r basta imporre $\mathbf{w} = (l, m, n)$ dove

$$l = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad m = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad n = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendendo il punto $(-1, 2, -1)$ (andava bene un qualsiasi punto della retta) possiamo scrivere

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}$$

(b) Sia A la matrice le cui righe sono determinate dai coefficienti dei piani che individuano le due rette r ed s, allora abbiamo che le due rette sono complanari (incidenti o parallele) se e soltanto se $\det(A) = 0$. In questo caso si vede che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

Possiamo quindi concludere che le rette r ed s sono sghembe.

(c) Innanzitutto notiamo che esiste un unico piano p' tale che p' contiene sia la retta r che il punto P (equivalentemente che esiste un unico piano p'' tale che p'' contiene sia la retta s che il punto P), inoltre i piani p' e p'' sono distinti (altrimenti r ed s sarebbero complanari) ed hanno un punto in comune, quindi $p' \cap p'' = t$ come richiesto. Quindi utilizzando il fascio proprio di piani di asse r, $\lambda(x+z+2)+\mu(x+y+z)=0$, imponendo il passaggio per il punto P otteniamo $3\lambda+2\mu=0$, scegliendo ad esempio $\lambda=-2$ e $\mu=3$ (andavano bene due qualsiasi valori di λ e di μ che risolvevano l'equazione) troviamo il piano $p' : x+3y+z-4=0$; utilizzando un procedimento analogo con il fascio di piani di asse s, $\lambda(y+3)+\mu(z+1)=0$ imponiamo il passaggio per il punto P e otteniamo $4\lambda+3\mu=0$ allora $p'' : 4x-3y-5=0$. Allora le equazioni cartesiane di $t = p' \cap p''$

$$\begin{cases} x+3y+z-4=0 \\ 4x-3y-5=0 \end{cases}$$

(d) Le equazioni parametriche di q sono

$$\begin{cases} x = 2-t \\ y = -1 \\ z = -1+5t \end{cases}$$

Scrivendo la matrice

$$\begin{pmatrix} x-2 & y+1 & z+1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e annullando due dei suoi minori otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} 5x+z-9=0 \\ y+1=0 \end{cases}$$

Per vedere se le rette t e q sono parallele, incidenti o sghembe comincio con vedere il rango della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Si nota subito che $\det(B) = 0$, Inoltre si può vedere che la sottomatrice $B(234|123)$ è invertibile. Quindi per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha un'unica soluzione (in altre parole le rette sono incidenti) e il punto di intersezione è il punto $(\frac{1}{2}, -1, \frac{13}{2})$.

3. (a) Utilizzando le stesse argomentazioni date in precedenza per scrivere le equazioni parametriche e cartesiane delle rette nello spazio affine 3-dimensionale reale abbiamo che le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = 3+t \end{cases}$$

e che annullando due minori della matrice

$$\begin{pmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+z-5=0 \end{cases}$$

(b) Visto che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -2$$

abbiamo che le rette r ed s sono sghembe.

(c) Per scrivere l'equazione del piano richiesto basta osservare che, presi i vettori di giacitura della retta r (che è proprio $\mathbf{v}$ dato nel punto (a) dell'esercizio) e della retta s (che denotiamo con $\mathbf{w}$), il piano p' avrà come giacitura proprio i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} = (0, -1, 0)$, imponendo il passaggio per il punto Q otteniamo l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = -1-t-s \\ z = -2+t \end{cases}$$

Per scrivere l'equazione cartesiana del piano imponiamo che

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 = x+z+1$$

(d) Utilizzando l'equazione del fascio proprio di piani di asse r abbiamo che $\lambda(x-y-1)+\mu(x+z-5)=0$ e imponendo il passaggio per il punto $(-1,-1,6)$ otteniamo $\lambda+2\mu=0$. Quindi presi ad esempio $\lambda=2$ e $\mu=-1$ otteniamo l'equazione del piano $p'' : x-2y-z+3=0$

(e) Osservando che il piano p'' contiene sia il punto $(0,2,-1)$ che la retta r allora un piano che individua la retta q è proprio p'' (risulta essere proprio p'' in quanto visto che le rette sono sghembe allora esiste un unico piano con le proprietà sopra elencate), per trovare l'altro piano che individua la retta q utillizziamo nuovamente il fascio proprio di piani di asse s, ossia $\lambda(x-1)+\mu(z-2)=0$. Imponendo il passaggio per il punto $(0,2,-1)$ otteniamo $-\lambda-3\mu=0$, presi ad esempio $\lambda=3$ e $\mu=-1$ otteniamo il piano $3x-z-1=0$. Presa q come la retta data dall'intersezione del piano p'' con il piano $3x-z-1=0$ abbiamo che $q \cap t = (0,2,-1)$ come richiesto. (La verifica che il punto $(0,2,-1) \in t$ è stata omessa).

4. (a) Cominciamo con il verificare che F è un'applicazione lineare. Presi $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{w} = (d,e,f) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo che

$$F(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = F(a+d, b+e, c+f) =$$

$(2(c+f)-(a+d),(a+d)+(b+e),(a+d)+2(b+e)+2(c+f)) =$

$((2c-a)+(2f-d),(a+b)+(d+e),(a+2b+2c)+(d+2e+2f)) =$

$(2c-a,a+b,a+2b+2c)+(2f-d,d+e,d+2e+2f) = F(\mathbf{v})+F(\mathbf{w})$

Inoltre abbiamo che, preso $k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v} = (a,b,c)$, vale

$$F(k\mathbf{v}) = F(ka,kb,kc) = (2kc-ka,ka+kb,ka+2kb+2kc) =$$

$$(k(2c-a),k(a+b),k(a+2b+2c)) = k(2c-a,a+b,a+2b+2c) = kF(\mathbf{v})$$

Per determinare l'immagine basta osservare che in generale $Im(F) = \langle F(e_1),F(e_2),F(e_3)\rangle$ dove con $e_i, i = 1,2,3$ indichiamo i vettori di una base fissata. Nel nostro caso prendendo come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che $Im(F) = \langle(-1,1,1),(0,1,2),(2,0,2)\rangle = \langle(0,1,2),(2,0,2)\rangle$, possiamo quindi concludere che $\dim(Im(F)) = 2$ e che, per il teorema del rango più nullità abbiamo che $\dim(\ker(F)) = 1$. Per determinare il nucleo di F basta porre $F(\mathbf{v}) = (0,0,0)$ e risolvere il sistema omogeneo con il metodo di Gauss-Jordan (non è l'unico modo di trovare le soluzioni), così facendo troviamo che $\ker(F) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(a,b,c) = (t,-t,t/2)$ con $t \in \mathbb{R}\}$.

(b) Cominciamo con il verificare che F è un'applicazione lineare. Presi $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{w} = (d,e,f) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo che

$$F(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = F(a+d,b+e,c+f) =$$

$$(3(a+d)+(b+e)+2(c+f),-(c+f)-2(a+d)-2(b+e),(a+d)+(c+f)) =$$

$$((3a+b+2c)+(3d+e+2f),(-c-2a-2b)+(-f-2d-2e),(a+c)+(d+f)) =$$

$$(3a+b+2c,-c-2a-2b,a+c)+(3d+e+2f,-f-2d-2e,d+f) = F(\mathbf{v})+F(\mathbf{w})$$

Inoltre abbiamo che, preso $k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v} = (a,b,c)$, vale

$$F(k\mathbf{v}) = F(ka,kb,kc) = (3ka+kb+2kc,-kc-2ka-2kb,kc+ka) =$$

$$(k(3a+b+2c),k(-c-2a-2b),k(c+a)) = kF(\mathbf{v})$$

Come nel caso precedente abbiamo che presa come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$ allora $Im(F) = \langle(3,-2,1),(1,-2,0),(2,-1,1)\rangle$, possiamo quindi concludere che $\dim(Im(F)) = 3$ e per il teorema di rango più nullità $\dim(\ker(F)) = 0$, in particolare l'applicazione F è un isomorfismo.

(c) La verifica che F è lineare si svolge analogamente ai due punti precedenti, quindi verrà tralasciata. Per determinare l'immagine procediamo come sopra e troviamo $Im(F) = \langle(1,1),(-1,1),(-1,1)\rangle = \langle(1,1),(-1,1)\rangle = \mathbb{R}^2$. Il nucleo avrà quindi dimensione 1 e per trovarlo imponiamo $F(\mathbf{v}) = (0,0)$ e otteniamo $\ker(F) = \{(0,t,t)\}$

(d) $Im(F) = \langle(1,2,0,3),(-2,1,5,-1)\rangle$, $\ker(F) = (0,0)$

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 9 (5 Maggio 2008)
Applicazioni lineari e matrici associate

1. Per calcolare le matrici di cambiamento di base, può essere utile "aiutarsi" con la base canonica, che semplifica i calcoli. Infatti, $M_{a,b}(\mathbb{I}) = M_{a,e}(\mathbb{I}) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = (M_{e,a}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_{e,b}(\mathbb{I})$ e $M_{b,a}(\mathbb{I}) = (M_{a,b}(\mathbb{I}))^{-1} = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_{e,a}(\mathbb{I})$, dove e è la base canonica. Si noti che $M_{e,a}(\mathbb{I})$ e $M_{e,b}(\mathbb{I})$ possono essere ottenute semplicemente mettendo in colonna le coordinate dei vettori rispettivamente di a e di b.

   (a) $M_{a,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad M_{b,a}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $M_{a,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_{b,a}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

   (c) $M_{a,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{b,a}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $M_{a,b}(\mathbb{I}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_{b,a}(\mathbb{I}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Per determinare la matrice associata a F rispetto a v si può usare la formula $M_v(F) = M_{v,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(F) \cdot M_{e,v}(\mathbb{I}) = (M_{e,v}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_e(F) \cdot M_{e,v}(\mathbb{I})$, dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice $M_e(F)$ si calcola facilmente mettendo in colonna le immagini dei vettori della base canonica, ed è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, mentre $M_{e,v}(\mathbb{I})$ si ottiene anch'essa facilmente mettendo in colonna le coordinate dei vettori di v, e quindi è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Abbiamo quindi che $M_v(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Ragionando come sopra, abbiamo che $M_{w,v}(G) = M_{w,e'}(\mathbb{I}) \cdot M_{e',e}(G) \cdot M_{e,v}(\mathbb{I})$, dove e' è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si ha che $M_{w,e'}(\mathbb{I}) = (M_{e',w}(\mathbb{I}))^{-1}$, con quest'ultima matrice che si calcola in maniera analoga a $M_{e,v}(\mathbb{I})$. Si ha quindi che $M_{w,v}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -6 & -10 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
$M_{v,w}(H) = M_{v,e}(\mathbb{I}) \cdot M_{e,e'}(H) \cdot M_{e',w}(\mathbb{I}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

$M_w(I) = M_{w,e'}(\mathbb{I}) \cdot M_{e'}(I) \cdot M_{e',w}(\mathbb{I}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Le matrici di cambiamento di base sono $M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $M_{b,e}(\mathbb{I}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dal testo conosciamo le coordinate delle immagini dei vettori di b rispetto alla base canonica, quindi $M_{e,b}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Per trovare $M_e(T)$ è sufficiente calcolare, secondo la formula del cambiamento di base, $M_{e,b}(T) \cdot M_{b,e}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Analogamente, $M_b(T) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_{e,b}(T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. L'applicazione è definita come $F(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3) = a_1+2a_2X+3a_3X^2$, quindi affinché $F(p(x)) = 0$ dobbiamo imporre $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, quindi il nucleo è costituito dai polinomi costanti, cioè $\ker F = \mathbb{R}$; per l'immagine, notiamo che al variare di a_1, a_2, a_3 si trovano tutti e soli i polinomi di grado ≤ 2, quindi $Im(F) = \Pi_2$.

   La matrice rispetto alla base canonica si calcola facilmente ed è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Per trovare la matrice rispetto alla base b si può usare la formula del cambiamento di base $M_b(F) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I})$. Si ha quindi
   $$M_b(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Vera. Infatti, se $v_1 \dots v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $\exists a_1 \dots a_n \in K$ non tutti nulli tali che $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0$. Dalla linearità di F segue che $0 = F(0) = F(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n) = a_1 \cdot F(v_1) + \cdots + a_n \cdot F(v_n)$, ma essendo $a_1 \dots a_n$ per ipotesi non tutti nulli, abbiamo che $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono linearmente dipendenti.

   (b) Falsa. Basta prendere come controesempio l'applicazione che manda tutti i vettori nello 0: in questo caso, qualsiasi n-upla di vettori, quindi in particolare una n-upla di vettori indipendenti, viene mandata in una n-upla di vettori tutti nulli, quindi dipendenti.

   (c) Vera. Dimostriamo che se $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono linearmente dipendenti, allora $v_1 \dots v_n$ sono linearmente dipendenti: se $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono linearmente dipendenti, allora $\exists a_1 \dots a_n \in K$ non tutti nulli tali che $a_1 \cdot F(v_1) + \cdots + a_n \cdot F(v_n) = 0$ Inoltre abbiamo che se $F \in GL(V)$, allora $\ker F = \{0\}$, quindi, per la linearità di F si ha che $0 = a_1 \cdot F(v_1) + \cdots + a_n \cdot F(v_n) = F(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n) \Rightarrow a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0$, ma essendo $a_1 \dots a_n$ per ipotesi non tutti nulli, abbiamo che $v_1 \dots v_n$ sono linearmente dipendenti. (Alternativamente, si poteva ragionare nel seguente modo: $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i$, inoltre essendo F un automorfismo, $F(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, quindi $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i \Leftrightarrow 0 = F(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n) = a_1 \cdot F(v_1) + \cdots + a_n \cdot F(v_n)$, quindi $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.)

6. Una proprietà delle applicazioni lineari è che vettori linearmente dipendenti vengono mandati in vettori linearmente dipendenti (come era chiesto di dimostrare nell'esercizio precedente), ma in questo caso abbiamo che

$\{e_1+e_3, e_2+e_4, e_1+e_2, e_3+e_4\}$ sono linearmente dipendenti (la somma dei primi due è uguale alla somma degli ultimi due) mentre ovviamente $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, essendo una base, non possono esserlo. (Alternativamente, si poteva notare che, se esistesse una siffatta applicazione lineare F, si avrebbe che $e_1+e_2 = F(e_1+e_3)+F(e_2+e_4) = F(e_1+e_2+e_3+e_4) = F(e_1+e_2)+F(e_3+e_4) = e_3+e_4 \Rightarrow e_1+e_2-e_3-e_4 = 0$, quindi avremmo trovato una combinazione lineare non banale di $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ che da il vettore nullo, cosa che è assurda in quanto i vettori in questione, essendo una base di $\mathbb{R}^4$, sono linearmente indipendenti.)

7. Mostriamo che se $u \in \ker(G)$, allora $u \in \ker(F \circ G)$ e che se $w \in Im(F \circ G)$ allora $w \in Im(F)$: $u \in \ker(G) \Leftrightarrow G(u) = 0_V \Rightarrow F(G(u)) = F(0_V) = 0_W \Rightarrow u \in \ker(F \circ G)$, quindi $\ker(G) \subseteq \ker(F \circ G)$.
   $w \in Im(F \circ G) \Leftrightarrow \exists u \in U$ tale che $(F \circ G)(u) = F(G(u)) = w \Rightarrow \exists v = G(u)$ tale che $F(v) = w \Rightarrow w \in Im(F)$, quindi $Im(F \circ G) \subseteq Im(F)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 10 (8 MAGGIO 2008)
CAMBIAMENTO DI COORDINATE AFFINI, DIAGONALIZZAZIONE

1. (a) Per determinare la formula del cambiamento di coordinate affini, notiamo che se P è un punto che ha coordinate (x, y) nel sistema di riferimento standard e (x', y') nel nuovo sistema di riferimento, allora $\overrightarrow{OP} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$ e $\overrightarrow{O'P} = x' \cdot f_1 + y' \cdot f_2$; inoltre, essendo valida l'uguaglianza vettoriale $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$, saranno uguali anche le coordinate dei vettori espressi rispetto alla base $f = \{f_1, f_2\}$, ovvero $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + M_{f,e}(\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dove $(c_1, c_2)^t$ sono le coordinate del vettore $\overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{OO'}$ rispetto alla base f; queste ultime sono a loro volta uguali a $M_{f,e}(\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} -x_{O'} \\ -y_{O'} \end{pmatrix}$, dove $(x_{O'}, y_{O'})$ sono le coordinate del vettore OO' rispetto alla base canonica, ma essendo O l'origine, queste corrisponderanno proprio alle coordinate del punto O'. Riassumendo, abbiamo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{f,e}(\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + M_{f,e}(\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} -x_{O'} \\ -y_{O'} \end{pmatrix}$, cioè in questo caso $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi sviluppando i calcoli abbiamo $\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1 \\ y' = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1 \end{cases}$.

   (b) Ragionando come sopra, troviamo che $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x' = -3x + 2y - 5 \\ y' = 5x - 3y + 8 \end{cases}$.

   (c) $\begin{cases} x' = -\frac{x}{5} + \frac{2}{5}y + \frac{z}{5} \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{y}{5} + \frac{3}{5}z - 2 \\ z' = \frac{2}{5}x + \frac{y}{5} - \frac{2}{5}z \end{cases}$.

   (d) $\begin{cases} x' = x + y + z + 3 \\ y' = x + y - 2 \\ z' = x - 1 \end{cases}$.

2. Per determinare se F è diagonalizzabile, rappresentiamola in forma matriciale rispetto alla base canonica e calcoliamone il polinomio caratteristico: (si noti che, scegliendo un'altra base, il polinomio caratteristico sarebbe stato lo stesso; è stata scelta quella canonica per semplificare i conti) $P_F(\lambda) = \det(M_e(F) - \lambda \cdot \mathbb{I}_3) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)$. Ci sono quindi 3 autovalori distinti (0,

1 e 4) e perciò F è diagonalizzabile; per determinare una base di autovettori, cerchiamo i generatori dei rispettivi autospazi, cioè delle soluzioni dei sistemi omogenei $(M_e(F) - \lambda \cdot \mathbb{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per $\lambda = 0, 1, 4$. Per $\lambda = 0$ troviamo $\begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$, che ha come soluzioni $\langle(1, 0, -1)\rangle$; allo stesso modo, troviamo i generatori degli autospazi relativi a 1 e 4, che sono rispettivamente $(3, -1, -2)$ e $(3, 2, 1)$. Quindi, una base di autovettori per F è $\{(1, 0, -1), (3, -1, -2), (3, 2, 1)\}$. Per passare dalla base canonica a quella composta da questi autovettori, abbiamo che $M_b(F) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot$
$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 9 & -9 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, che è una matrice diagonale.
Ragionando come sopra, si trova che $P_G(\lambda) = \det(M_e(G) - \lambda \cdot \mathbb{I}_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 4\lambda^2 = -\lambda(\lambda^2 + 4)$. Abbiamo quindi un unico autovalore reale (0), che ha molteplicità algebrica 1, quindi l'autospazio relativo a questo autovettore avrà dimensione 1; quindi, essendo la somma delle dimensioni degli autospazi strettamente minore dello spazio su cui è definita G, l'applicazione NON è diagonalizzabile.
$P_H(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1 = (1 - \lambda)(\lambda - 1 + \sqrt{2})(\lambda - 1 - \sqrt{2})$, quindi gli autovalori di H sono 1 e $1 \pm \sqrt{2}$; sono tre autovalori reali distinti quindi H è diagonalizzabile. L'autospazio relativo a 1 è generato da $(2, 1, -2)$, quello relativo a $1 - \sqrt{2}$ è generato da $(\sqrt{2}, -1, 0)$ e quello relativo a $1 + \sqrt{2}$ da $(\sqrt{2}, 1, 0)$, quindi una base di autovettori per H è $\{(2, 1, -2), (\sqrt{2}, -1, 0), (\sqrt{2}, 1, 0)\}$. Si ha che $M_b(H) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(H) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3. Per trovare autovalori e autospazi di A, calcoliamo il polinomio caratteristico come nell'esercizio precedente: abbiamo che $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$. La matrice ha quindi due autovalori reali distinti e pertanto è diagonalizzabile. Per trovare gli autospazi, cerchiamo le soluzioni dei sistemi lineari $(A - 0 \cdot \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $(A - 2 \cdot \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; si trova rispettivamente $\langle(1, -1)\rangle$ e $\langle(1, 1)\rangle$. Per trovare le matrici M e D conviene

considerare l'applicazione lineare F definita dalla matrice A rispetto alla base canonica: A=$M_e(F)$; essendo $b = \{(1,-1),(1,1)\}$ una base di autovettori di A (e quindi di F), avremo che $M_b(F)$ è una matrice diagonale avente i due autovalori di A sulla diagonale principale, ovvero $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, quindi $D = M_b(F)$. Inoltre, per la formula di cambiamento di base, abbiamo che $D = M_b(F) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot A \cdot M_{e,b}(\mathbb{I})$, quindi $M = M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
$P_B(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3$, quindi B ha un unico autovalore (1) con molteplicità algebrica 3; l'autospazio relativo a 3 ha però dimensione 1, in quanto generato dall'unico vettore $(0,0,1)$, quindi la matrice B NON è diagonalizzabile.
$P_C(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2$. L'autospazio relativo 0 è generato da $(1,0,-1,0)$ e $(0,1,0,-1)$ e quello relativo a 2 è generato da $(1,0,1,0)$ e $(0,1,0,1)$, quindi B è diagonalizzabile; la matrice M sarà $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Il polinomio caratteristico di A è $(k-\lambda)(1-\lambda-k)(1-\lambda+k)$, quindi gli autovalori sono k, $1-k$ e $k+1$. Per $0 \neq k \neq \frac{1}{2}$ ci sono tre autovalori distinti, quindi la matrice è diagonalizzabile; se $k = 0$ si ha $\dim V_0 = 1, \dim V_1 = 2$ quindi anche in questo caso è diagonalizzabile; se invece $k = \frac{1}{2}$, $\dim V_{\frac{3}{2}} = 1 = \dim V_{\frac{1}{2}}$ quindi in questo caso A non è diagonalizzabile. Riassumendo, A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow k \neq \frac{1}{2}$.
Il polinomio caratteristico di B si fattorizza in $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+k)$, quindi per $k > 0$ abbiamo due soli autovalori reali, ognuno dei quali con molteplicità algebrica 1, quindi B non può essere diagonalizzabile; se $k = 0$ abbiamo tre autovalori (0,1 e -1) e ciascun autospazio ha dimensione 1, quindi non è diagonalizzabile; se $k = -1$ abbiamo due soli autovalori (1 e -1) con molteplicità geometrica 1, quindi neanche in questo caso la matrice è diagonalizzabile; infine se $-1 \neq k < 0$ invece abbiamo quattro autovalori reali distinti ($\Sigma(B) = \{1, -1, \sqrt{-k}, -\sqrt{-k}\}$) quindi è diagonalizzabile. Riassumendo, B è diagonalizzabile $\Leftrightarrow k \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$.
Il polinomio caratteristico di C è $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-k)$, quindi per $k \notin \{1,2,3\}$ la matrice ha quattro autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile; se $k = 2$ l'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 2, quindi anche in questo caso C è diagonalizzabile; infine, se $k = 1$ oppure $k = 3$ ognuno dei tre autospazi ha dimensione 1, quindi non è diagonalizzabile. Riassumendo, C è diagonalizzabile $\Leftrightarrow 1 \neq k \neq 3$.

5. Verifichiamo la linearità: siano $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora $F(\alpha \cdot A + \beta \cdot B) = (\alpha \cdot A + \beta \cdot B)^t = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} + \beta \cdot b_{11} & \alpha \cdot a_{21} + \beta \cdot b_{21} \\ \alpha \cdot a_{12} + \beta \cdot b_{12} & \alpha \cdot a_{22} + \beta \cdot b_{22} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \alpha \cdot A^t + \beta \cdot B^t = \alpha \cdot F(A) + \beta \cdot F(B)$. La matrice rispetto alla base canon-

ica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per trovare quella rispetto a b si può applicare la formula di cambiamento di base e si trova $M_b(F) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
Cerchiamo ora il polinomio caratteristico, usando per semplicità la matrice rispetto alla base canonica: $P_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$
$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$. Calcoliamo ora gli autospazi relativi a 1 e -1:
$V_1 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{12} = a_{21} \Rightarrow V_1 =$
$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$
$V_{-1} : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = -a_{21} \\ a_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 =$
$\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.
Avendo trovato una base di autovettori $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \}$, possiamo dire che l'operatore F è diagonalizzabile.
(Si noti che autovalori, autospazi e diagonalizzabilità potevano essere discussi senza fare calcoli con il seguente ragionamento teorico: ogni matrice simmetrica è per definizione tale che $F(A) = {}^tA = A$ e ogni matrice simmetrica è tale che $F(A) = {}^tA = -A$, quindi le prime sono autovettori con autovalore 1 e le seconde autovettori con autovalore -1, e poiché lo spazio delle matrici quadrate è somma diretta di questi due autospazi, questi erano tutti e soli gli autovalori e autospazi e l'operatore di trasposizione è perciò diagonalizzabile).

6. Per dimostrare la prima parte è sufficiente notare che A e ${}^tA$ hanno lo stesso polinomio caratteristico: se $P_A(\lambda) = P_{{}^tA}(\lambda)$, i due polinomi avranno le stesse radici, che sono proprio gli autovalori di A e ${}^tA$ rispettivamente. L'uguaglianza dei due polinomi caratteristici discende della linearità dell'operazione di trasposizione, che si verifica immediatamente (tra l'altro è già stata vista nell'esercizio precedente) e dall'invarianza

per trasposizioni del determinante: $\det({}^tA - \lambda \cdot \mathbb{I}_n) = \det({}^tA - \lambda \cdot {}^t\mathbb{I}_n) = \det{}^t(A - \lambda \cdot \mathbb{I}_n) = \det(A - \lambda \cdot \mathbb{I}_n)$. Tuttavia, non è detto che gli autovettori di ${}^tA$ siano gli stessi di A: ad esempio, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha come autovalori 0 e 1, l'autospazio relativo a 0 è $\langle(1,-1)\rangle$ e quello relativo a 1 è $\langle(1,0)\rangle$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ invece ha come autospazio relativo a 0 $\langle(0,1)\rangle$ e come autospazio relativo a 1 $\langle(1,1)\rangle$.

7. Se A è una matrice diagonalizzabile, allora esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M = D$, con D matrice diagonale. Allora $M^{-1} \cdot A^2 \cdot M = M^{-1} \cdot A \cdot M \cdot M^{-1} \cdot A \cdot M = D^2$, che è una matrice diagonale perché prodotto di due matrici diagonali, quindi anche A^2 è simile ad una matrice diagonale, cioè è diagonalizzabile. Il viceversa, tuttavia, non è vero: consideriamo ad esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, che è ovviamente diagonalizzabile (essendo diagonale), ma A non è diagonalizzabile: infatti $P_A(\lambda) = \lambda^2$ e l'autospazio relativo all'autovalore 0 ha dimensione 1, perché corrisponde proprio alle soluzioni del sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e la matrice A ha rango 1

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 11 (15 Maggio 2008)
Spazi duali, ripasso su spazi affini e applicazioni lineari

1. Per dimostrare che $V^\vee$ è un K-spazio vettoriale, facciamo vedere innanzi tutto che $L_1 + L_2$ e $c \cdot L$ sono anch'essi funzionali lineari: $(L_1 + L_2)(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = L_1(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) + L_2(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = \alpha \cdot L_1(v) + \beta \cdot L_1(w) + \alpha \cdot L_2(v) + \beta \cdot L_2(w) = \alpha \cdot L_1(v) + \alpha \cdot L_2(v) + \beta \cdot L_1(w) + \beta \cdot L_2(w) = \alpha \cdot (L_1 + L_2)(v) + \beta \cdot (L_1 + L_2)(w)$. Analogamente, $(c \cdot L)(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = c \cdot L(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = c \cdot (\alpha \cdot L(v) + \beta \cdot L(w)) = c \cdot \alpha \cdot L(v) + c \cdot \beta \cdot L(w) = \alpha \cdot c \cdot L(v) + \beta \cdot c \cdot L(w) = \alpha \cdot (c \cdot L)(v) + \beta \cdot (c \cdot L)(w)$. Mostriamo ora che vengono rispettate tutte le proprietà di spazio vettoriale che indicheremo come SV1,...,SV8 con la stessa notazione del Sernesi:

   SV1 $\forall L_1, L_2, L_3 \in V^\vee, \forall v \in V$ si ha che $((L_1 + L_2) + L_3)(v) = (L_1 + L_2)(v) + L_3(v) = L_1(v) + L_2(v) + L_3(v) = L_1(v) + (L_2(v) + L_3(v))$, quindi $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3), \forall L_1, L_2, L_3$.

   SV2 Definiamo $0_{V^\vee} \in V^\vee$ come il funzionale lineare tale che $0_{V^\vee}(v) = 0, \forall v \in V$: si ha che $\forall L \in V^\vee, \forall v \in V, (L+0_{V^\vee})(v) = L(v)+0_{V^\vee}(v) = L(v) + 0 = L(v) = 0 + L(v) = 0_{V^\vee}(v) + L(v) = (0_{V^\vee} + L)(v)$, quindi $(L + 0_{V^\vee}) = L = (0_{V^\vee} + L), \forall L$.

   SV3 $\forall L \in V^\vee, \forall v \in V$ si ha che $L(v) + (-1)L(v) = L(v) - L(v) = 0$, quindi $L + (-L) = 0, \forall L$.

   SV4 $\forall L_1, L_2 \in V^\vee, \forall v \in V$ si ha che $(L_1 + L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v) = L_2(v) + L_1(v) = (L_2 + L_1)(v)$, quindi $L_1 + L_2 = L_2 + L_1, \forall L_1, L_2$.

   SV5 $\forall c \in K, \forall L_1, L_2 \in V^\vee, \forall v \in V$ si ha che $(c \cdot (L_1 + L_2))(v) = c \cdot ((L_1 + L_2)(v)) = c \cdot (L_1(v) + L_2(v)) = c \cdot L_1(v) + c \cdot L_2(v) = (c \cdot L_1)(v) + (c \cdot L_2)(v)$, quindi $c \cdot (L_1 + L_2) = c \cdot L_1 + c \cdot L_2, \forall c, L_1, L_2$.

   SV6 $\forall c_1, c_2 \in K, \forall L \in V^\vee, \forall v \in V$ si ha che $((c_1 + c_2) \cdot (L))(v) = (c_1 + c_2) \cdot L(v) = c_1 \cdot L(v) + c_2 \cdot L(v) = (c_1 \cdot L)(v) + (c_2 \cdot L)(v)$, quindi $(c_1 + c_2) \cdot (L) = c_1 \cdot L + c_2 \cdot L, \forall c_1, c_2, L$.

   SV7 $\forall c_1, c_2 \in K, \forall L \in V^\vee, \forall v \in V$ si ha che $((c_1 \cdot c_2) \cdot (L))(v) = (c_1 \cdot c_2) \cdot L(v) = c_1 \cdot (c_2 \cdot L(v)) = c_1 \cdot (c_2 \cdot L)(v)$, quindi $(c_1 \cdot c_2) \cdot (L) = c_1 \cdot (c_2 \cdot L), \forall c_1, c_2, L$.

   SV8 $\forall L \in V^\vee, \forall v \in V$ si ha che $(1 \cdot L)(v) = 1 \cdot L(v) = L(v)$, quindi $1 \cdot L = L, \forall L$.

   Mostriamo ora che $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ è una base di $V^\vee$: notiamo innanzi tutto che η_i è ben definito $\forall i$, perché per definire un'applicazione lineare (e quindi in particolare un elemento di $V^\vee$) è sufficiente specificare le immagini dei vettori di una base. Facciamo vedere ora che $\eta_1, \dots, \eta_n$ generano l'intero spazio $V^\vee$: sia $L \in V^\vee$ tale che $L(e_i) = a_i, \forall i = 1, \dots, n$; allora il funzionale $a_1 \cdot \eta_1 + a_2 \cdot \eta_2 + \cdots + a_n \cdot \eta_n$ è tale che $(a_1 \cdot \eta_1 + \cdots + a_n \cdot \eta_n)(e_i) = (a_1 \cdot \eta_1)(e_i) + \cdots + (a_i \cdot \eta_i)(e_i) + \cdots + (a_n \cdot \eta_n)(e_i) = a_1 \cdot \eta_1(e_i) + \cdots + a_i \cdot \eta_i(e_i) +$

$\cdots + a_n \cdot \eta_n(e_i) = a_i \cdot \eta_i(e_i) = a_i$; si ha quindi che $a_1 \cdot \eta_1 + a_2 \cdot \eta_2 + \cdots + a_n \cdot \eta_n$ ha gli stessi valori di L sulla base e e quindi i due funzionali coincidono; per l'arbitarietà di L, abbiamo che $\eta_1, \ldots, \eta_n$ generano $V^\vee$. Mostriamo ora che sono linearmente indipendenti: supponiamo che per certi $a_1, \ldots, a_n$ si abbia che $a_1 \cdot \eta_1 + a_2 \cdot \eta_2 + \cdots + a_n \cdot \eta_n = 0_{V^\vee}$; allora, $\forall i = 1, \ldots, n$ si ha che $0 = 0_{V^\vee}(e_i) = (a_1 \cdot \eta_1 + \cdots + a_n \cdot \eta_n)(e_i) = (a_1 \cdot \eta_1)(e_i) + \cdots + (a_i \cdot \eta_i)(e_i) + \cdots + (a_n \cdot \eta_n)(e_i) = a_1 \cdot \eta_1(e_i) + \cdots + a_i \cdot \eta_i(e_i) + \cdots + a_n \cdot \eta_n(e_i) = a_i \cdot \eta_i(e_i) = a_i$, quindi $a_i = 0, \forall i$, ovvero $\eta_1, \ldots, \eta_n$ sono anche linearmente indipendenti, pertanto costituiscono una base di $V^\vee$.

2. Per rappresentare F in forma matriciale, è sufficiente scrivere in colonna le coordinate dei vettori della base canonica: si ha che $M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Per trovare gli autovalori, calcoliamo il polinomio caratteristico di questa matrice: $P_F(\lambda) = \det(M_e(F) - \lambda \cdot \mathbb{I}_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1)^2$. Gli autovalori sono quindi ± 1, entrambi con molteplicità algebrica 2. Determiniamo ora gli autospazi relativi a questi due autovalori: $V_1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \Rightarrow V_1 = \langle X^3 + Y^3, X^2Y + XY^2 \rangle$. $V_{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow V_{-1} = \langle X^3 - Y^3, X^2Y - XY^2 \rangle$. Abbiamo quindi che entrambi gli autospazi hanno dimensione due, quindi F è diagonalizzabile.

3. Mostriamo innanzitutto che gli autospazi sono in somma diretta (fatto vero anche per applicazioni non diagonalizzabili): infatti, se $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$, allora $F(v) = \lambda_1 \cdot v = \lambda_2 \cdot v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot v = 0_V$, ma essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, deve essere $v = 0_V$, quindi $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0_V\}$. A questo punto è sufficiente dimostrare che $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n} = V$: sicuramente si avrà che $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n} \subseteq V$, perché tutti gli autospazi sono sottospazi di V e quindi lo sarà anche la loro somma; inoltre, per la formula di Grassmann abbiamo che $\dim(V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) - \dim(V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2})$ e quindi, iterando il procedimento per tutti gli autospazi, avremo che $\dim(V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_n})$. Se adesso supponiamo che F sia diagonalizzabile, abbiamo che $\dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_n}) = \dim(V)$, quindi abbiamo che $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n}$ è un sottospazio di V avente la stessa dimensione

di V, ma allora deve essere necessariamente $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_n} = V$, e quindi si ha l'asserto.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ una matrice di ordine n unitriangolare superiore. Il suo polinomio caratteristico è $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^n$. La matrice ha quindi 1 come unico autovalore, quindi è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ l'autospazio relativo a 1 ha dimensione n. Ciò equivale a dire che $r(A - \mathbb{I}_n) = 0$, ovvero $A - \mathbb{I}_n = 0_n$, cioè $A = \mathbb{I}_n$, quindi A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow A = \mathbb{I}_n$.
   Nel caso di matrici strettamente triangolari inferiori la dimostrazione è analoga: basta considerare ${}^tA$ al posto di A e ripetere lo stesso identico ragionamento.

5. Notiamo innanzitutto che F è iniettiva $\Leftrightarrow \ker(F) = \{0\}$ e G è suriettiva $\Leftrightarrow Im(G) = W$. Allora, applicando il teorema rango più nullità prima a G e poi a F, si ha che $\dim V = \dim(\ker(G)) + \dim(Im(G)) = \dim(Im(F)) + \dim W = \dim U - \dim(\ker(F)) + \dim W = \dim U + \dim W$.

6. (a) Affinché le due rette siano complanari, è necessario e sufficiente che il determinante della matrice orlata sia nullo, ovvero $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3h + 3$, quindi le rette sono complanari $\Leftrightarrow h = -1$; notiamo poi che la matrice dei coefficienti ha rango 3 (ad esempio, il minore formato dalle prime tre righe e dalle prime tre colonne ha determinante non nullo), quindi le rette sono incidenti; per trovare il punto di intersezione è sufficiente risolvere il sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ y - z = 0 \\ z = 1 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ e si ottiene il punto $(2, 1, 1)$. Per determinare un piano comune ad entrambe, imponiamo che esso appartenga sia al fascio passante per r che a quello per s, ovvero che per certi α, β, γ, δ si abbia $\alpha(x + y - 3) + \beta(y - z) = \gamma(z - 1) + \delta(x - 2z)$: uguagliando i coefficienti delle tre incognite e dei termini noti otteniamo che $\alpha = \delta$,$\beta = -\delta$ e $\gamma = 3\delta$, quindi fissando $\delta = 1$ otteniamo il piano $x + z - 3$.

   (b) Ragionando come sopra, otteniamo che il determinante della matrice 4×4 è $-3h + 6$, quindi le rette sono complanari per $h = 2$. Notiamo che per questo valore la matrice dei coefficienti ha rango due, visto che la terza riga è la differenza delle prime due mentre la quarta è la loro somma, quindi le rette sono parallele; per determinarne il piano che le contiene, procediamo come nel punto precedente, ovvero troviamo gli α, β, γ, δ per cui $\alpha(x+y)+\beta(x-z-3) = \gamma(y+z)+\delta(2x+y-z)$ e troviamo $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$, quindi il piano che contiene entrambe le rette è $2x + 2y = 0$, cioè $x + y = 0$.

(c) Procedendo come nei due casi precedenti, troviamo che le due rette sono complanari $\Leftrightarrow h = 0$ e per questo valore le rette sono incidenti in quanto la matrice dei coefficienti ha rango 3 (ad esempio, il minore formato dalle prime tre righe e dalle prime tre colonne è diverso da zero). Il piano che contiene le due rette e il loro punto di intersezione si trovano analogamente a sopra, e si trova rispettivamente $y = 0$ e $(1, 0, -\frac{1}{2})$.

7. (a) Per trovare il nucleo di F, imponiamo $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ovvero $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, quindi $\ker(F) = (t, s, -s-t) = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle$; per determinare l'immagine, innanzi tutto sappiamo dal teorema rango più nullità che deve avere dimensione 1, quindi per determinarne un generatore è sufficiente trovare l'immagine di un vettore che non appartenga al nucleo, ad esempio $(1, 0, 0)$: si ha che $Im(F) = \langle F(1, 0, 0)\rangle = \langle(1, 1, 1)\rangle$. Per trovare autovalori e autovettori calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica $M_e(F)$, e si ha $-\lambda^3 + 3\lambda^2$, quindi gli autovalori sono 0 e 3; l'autospazio relativo a 0 coincide col nucleo di F e quindi ha dimensione 2 ed è generato da $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$, mentre l'autospazio relativo a 3 è generato da $(1, 1, 1)$; essendo la somma delle dimensioni degli autospazi pari alla dimensione di $\mathbb{R}^3$, abbiamo che F è diagonalizzabile.

(b) Procedendo come sopra, troviamo che $\ker(F) = \{0\}$, quindi deve essere $Im(F) = \mathbb{R}^3$. Il polinomio caratteristico di F è $(\lambda - 1)^2(2 - \lambda)$, quindi gli autovalori sono 1 e 2: l'autospazio relativo a 2 è $\langle(5, -3, -1)\rangle$, mentre quello relativo a 0 ha come generatore $(1, 0, 0)$; abbiamo dunque trovato che la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è strettamente maggiore di quella geometrica, quindi concludiamo che F non è diagonalizzabile.

(c) $\ker(F) = \langle(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\rangle$, $Im(F) = \langle(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\rangle$. Il polinomo caratteristico è $(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$, quindi gli autovalori sono 0 e 2: l'autospazio relativo a 0 coincide col nucleo ed è quindi $\langle(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\rangle$, mentre quello relativo a 2 ha come generatori $(1, 0, 0, 1)$ e $(0, 1, 1, 0)$; entrambi gli autospazi hanno dimensione 2, quindi F è diagonalizzabile.

8. $P_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} k+1-\lambda & -k & -1 \\ k & 1-k-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2$: per discutere la diagonalizzabilità è quindi sufficiente discutere la dimensione dell'autospazio relativo a 1: questa sarà pari a 2 se e solo se la matrice $A - 1 \cdot \mathbb{I}_3$ ha rango 1, quindi A sarà diagonalizzabile solo in questo caso. Si ha che $A - \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} k & -k & -1 \\ k & -k & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: questa matrice ha rango 1 se

e solo se $k = 0$, infatti se $k = 0$ le prime due righe sono nulle, altrimenti il minore 2×2 formato dalle ultime due righe e dalle ultime due colonne è non nullo. Si ha quindi che A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow k = 0$.

$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -k & 1 & k-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - k\lambda^3 - \lambda^2 + k\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda+1)(\lambda-k)$, quindi se $0 \neq k \neq \pm 1$ ci sono quattro autovalori distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile. Consideriamo ora il caso $k = 0$: per vedere se è diagonalizzabile o meno, basterà trovare la dimensione dell'autospazio relativo a 0: si ha che $B - 0 \cdot \mathbb{I}_4 = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, che ha chiaramente rango 3 (il minore formato dalla prime tre righe e ultime tre colonne è diverso da zero); quindi l'autospazio associato a 0 ha dimensione 1 e quindi B non è diagonalizzabile. Se $k = 1$, analogamente studieremo la dimensione dell'autospazio relativo a 1: in questo caso si ha $B - 1 \cdot \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 3, quindi anche in questo caso B non è diagonalizzabile. Se infine $k = -1$, come sopra troviamo che $B + \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha anch'essa rango 3, quindi neppure in questo caso la matrice è diagonalizzabile. Riassumendo, abbiamo che B è diagonalizzabile $\Leftrightarrow k \notin \{-1, 0, 1\}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2007-2008 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 12 (30 Febbraio 2008)
Esercizi di preparazione al secondo esonero

* Cerchiamo una base di U nell'insieme dei suoi generatori dato dal testo dell'esercizio: i primi due vettori sono linearmente indipendenti, il terzo è pari alla somma dei primi due mentre il quarto è linearmente indipendente rispetto ai primi due, quindi una base è costituita dal primo, secondo e quarto vettore di quei generatori, ovvero $\{(1,1,0,0),(1,-1,-1,-2),(2,0,-1,-2),(1,2,1,2)\}$.
Per completare questo insieme di vettori ad una base di $\mathbb{R}^4$, è sufficiente aggiungere un vettore linearmente indipendente, proviamo per semplicità con quelli della base canonica: $e_1 = (1,0,0,0)$ non va bene, perché è uguale al quarto generatore di U meno il primo più il secondo; neanche $e_2 = (0,1,0,0)$ va bene, perché è uguale a due volte il primo meno il secondo meno il quarto; e_3 invece va bene per completare la base.
Per quanto riguarda V, notiamo che i primi due vettori sono linearmente indipendenti, il terzo è la somma dei primi due e il quarto è due volte il primo meno il secondo, quindi V ha dimensione 2 e una sua base è costituita dai primi due vettori, cioè $\{(1,0,1,0),(1,1,1,0)\}$; proviamo ora a completare questo insieme ad una base di $\mathbb{R}^4$ usando i vettori della base canonica, come nell'esercizio precedente, facendo però attenzione che questa volta ce ne serviranno due, e non uno solo, perché la dimensione di V è 2, non 3: il primo vettore della base canonica è linearmente indipendente con gli altri due quindi va bene, il secondo non va bene perché è la differenza dei primi due e il terzo neppure perché è uguale al primo generatore di V meno il primo vettore della base canonica, quindi sicuramente il quarto vettore della base canonica andrà bene per completare la base (se così non fosse, avremmo che $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,0),(1,0,0,0)\rangle$ contiene tutti i vettori della base canonica, che è assurdo visto che ha dimensione 3).
I quattro generatori di W sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base per W e inoltre $W = \mathbb{R}^4$, quindi non cè nulla da completare.

** (a) Calcoliamo innanzi tutto il determinante della matrice dei coefficienti del sistema: $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2m+1$, quindi per $m \neq \frac{1}{2}$ il sistema ha un'unica soluzione, che è $(-\frac{m}{2m-1}, \frac{2m^2}{2m-1}, \frac{m^2}{2m-1})$; se invece $m = \frac{1}{2}$, la matrice orlata ha rango massimo e quindi il sistema è incompatibile.

(b) Ragionando come sopra, troviamo che il determinante della matrice dei coefficienti è $m - m^3$, quindi per $0 \neq m \neq \pm 1$ la soluzione del sistema è unica, ovvero $(0, \frac{2}{1-m}, 1)$; se $m = 0$ ci sono ∞^1 soluzioni del tipo $(t-1, 2t, t)$, se $m = -1$ ci sono anche in questo caso ∞^1 soluzioni, del tipo $(t, \frac{t}{2}+1, 1)$, mentre se $m = 1$ il sistema è incompatibile.

(c) In questo caso, la matrice dei coefficienti non è quadrata, quindi non si può procedere allo stesso identico modo dei due casi precedenti, ma bisognerà studiare il rango di questa matrice: quando questo è uguale a 2, il sistema avrà ∞^1 soluzioni, e ciò accade $\leftrightarrow m \neq 2$, e le soluzioni sono $(\frac{1}{m-2}, \frac{tm-2t-1}{m-2}, t)$, al variare del parametro reale t; se invece $m = 2$, il sistema è incompatibile.

1. (a) Affinché le due rette siano incidenti, imponiamo innanzi tutto che siano complanari (ricordiamo che la complanarità è condizione necessaria ma non sufficiente affinché siano incidenti), cioè che il determinante della matrice orlata associata al sistema sia nullo: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & h & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2h - 8$, quindi le rette sono complanari $\Leftrightarrow h = 4$; per questo valore, la matrice dei coefficienti 4×3 ha rango 3, quindi le rette sono incidenti, e per trovare il loro punto di intersezione è sufficiente risolvere il sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4y - z = 1 \\ 3x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$, e si trova il punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

   (b) Procediamo come sopra, e troviamo che le rette sono complanari per $h = 1$ oppure $h = 0$; notiamo tuttavia che se $h = 1$ le due rette non sono incidenti ma parallele, in quanto la matrice dei coefficienti del sistema ha rango 2, quindi il valore per cui sono incidenti è $h = 0$; per trovare il punto di intersezione, notiamo che tutti i termini noti del sistema sono uguali a 0, quindi le rette si intersecheranno nel punto $(0, 0, 0)$.

2. (a) Affinché le due rette siano parallele, dobbiamo imporre innanzi tutto che siano complanari (anche in questo caso è una condizione necessaria ma non sufficiente) e, come nel precedente esercizio, imponiamo che si annulli il determinante della matrice 4×4, cioè $0 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & h & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 4h - 4$, quindi le due rette sono complanari se e solo se $h = 1$; per questo valore, la matrice dei coefficienti del sistema ha rango 2 quindi le due rette sono parallele; per trovarne il piano comune, imponiamo che questo appartenga sia al fascio di piani per r che a quello per s, cioè che per opportuni α, β, γ e δ si abbia $\alpha(2x + z + 1) + \beta(y - 2z) = \gamma(2x + y - z) + \delta(y - 2z + 1)$: uguagliando i coefficienti delle tre variabili e dei termini noti si ha che $\begin{cases} 2\alpha = 2\gamma \\ \beta = \gamma + \delta \\ \alpha - 2\beta = -\gamma - 2\delta \\ \alpha = \delta \end{cases}$, una soluzione del sistema (ne basta una, le altre saranno tutte proporzionali a questa) è $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \\ \delta = 1 \end{cases}$, quindi il

piano che contiene le due rette è $2x + 2y - 3z + 1 = 0$

(b) Procedendo come sopra, troviamo che le due rette sono complanari per $h = 1$ oppure $h = \frac{1}{3}$, ma l'unico valore per cui le rette sono parallele è $h = 1$ perchè per $h = \frac{1}{3}$ la matrice dei coefficienti ha rango 3 e quindi le rette sono incidenti; per $h = 1$, troviamo il piano che contiene r e s usando lo stesso metodo di sopra e troviamo $x+z+1 = 0$

3. (a) Essendo la retta s contenuta nel piano π, se r e s sono incidenti, lo saranno anche r e π, e il loro punto di intersezione sara anche il punto di intersezione di r e s: questo punto corrisponderà alle soluzioni del sistema $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, cioè $P = (1, 0, -1)$; dal testo abbiamo inoltre che s contiene il punto $Q(-2, 1, 1)$, quindi conoscendo due punti di s possiamo facilmente trovarne l'equazione imponendo che $r(\begin{pmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ x_P - x_Q & y_P - y_Q & z_P - z_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}) = 1$; imponendo che si annullino il minore formato dalle prime due colonne e quello formato dalle ultime due troviamo $s : x+3y-1 = 0 = 2y-z-1$. (Alternativamente, si poteva scrivere s come l'intersezione tra il piano π e il piano appartenente al fascio per r passante per il punto Q)

(b) Procedendo come sopra, troviamo che $s \cap \pi = (-4, -3, 3)$, quindi s è la retta passante per $(1, 2, 3)$ e $(-4, -3, 3)$, quindi $s : x - y + 1 = 0 = z - 3$.

4. (a) Per calcolare il rango di F, cioè la dimensione della sua immagine, notiamo che quest'ultima è generata dalle immagini dei vettori di una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio quella canonica, quindi $Im(F) = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1) \rangle$; essendo questi tre vettori linearmente indipendenti, abbiamo che $r(F) = 3$. (Alternativamente, per trovare il rango di F si poteva calcolare la dimensione del nucleo e usare il teorema rango più nullità). Per trovare la matrice che rappresenta F rispetto alle basi canoniche, è sufficiente scrivere in colonna le coordinate dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, quindi $M_{e,e'}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Per trovare la matrice rispetto alle basi a e b invece conviene applicare la formula di cambiamento di base: $M_{b,a}(F) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_{e,e'}(F) \cdot M_{e',a}(\mathbb{I}) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_{e,e'}(F) \cdot M_{e',a}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Calcoliamo il rango di F come nel punto precedente: $r(F) = \dim \langle (1,-1,0,1), (-1,1,0,1), (0,0,0,0$ $\dim \langle (1,-1,0,1), (-1,1,0,1) \rangle = 2$; analogamente, troviamo la matrice di F rispetto alle basi canoniche e rispetto alle altre due basi: $M_{e,e'}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{b,a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

(c) $r(F) = \dim \langle (1,1,3,1), (0,0,0,0), (3,-1,1,1) \rangle = \dim \langle (1,1,3,1), (3,-1,1,1) \rangle =$ 2; $M_{e,e'}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{b,a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \\ 10 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$

5. Per trovare gli autovalori di A calcoliamo innanzi tutto il suo polinomio caratteristico: $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (1-\lambda)(\lambda+2)^2$; gli autovalori sono quindi 1 e -2, con molteplicità algebrica rispettivamente 1 e 2; calcoliamone i rispettivi autospazi: V_1 : $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 =$ $\langle (1,1,1) \rangle$, V_{-2} : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $V_{-2} = \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$. Abbiamo quindi che per entrambi gli autovalori le molteplicità algebrica e geometrica coincidono (per $\lambda = 1$ si sapeva già, visto che la molteplicità algebrica era 1) e quindi A è diagonalizzabile. Per trovare una matrice M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ è diagonale, conviene considerare l'applicazione lineare F definita da A rispetto alla base canonica, ovvero $A = M_e(F)$; inoltre, essendo $b = \{(1,1,1), (1,0,-1), (0,1,-1)\}$ una base di autovalori per A, e quindi per F, avremo che $M_b(F)$ è diagonale, ma essendo $M_b(F) = M_{b,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot A \cdot M_{e,b}(\mathbb{I})$, possiamo scegliere $M = M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$P_B(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 4 = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 4)$, quindi B ha l'unico autovalore reale -1, con molteplicità algebrica 1, quindi l'unico autospazio

di B avrà necessariamente dimensione 1 e dunque la matrice non può essere diagonalizzabile. $V_{-1} = \langle(0,1,0)\rangle$.
$P_C(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)^2$, quindi gli autovalori di C sono 0 e ± 2. Gli autospazi di C sono $V_0 = \langle(0,0,1,-1)\rangle$, $V_2 = \langle(1,1,0,0)\rangle$, $V_{-2} = \langle(0,0,1,1)\rangle$; la somma delle dimensioni degli autospazi è minore dell'ordine della matrice e quindi C non è diagonalizzabile.
$P_D(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2$, quindi D ha come autovalori 0 e 2, e i rispettivi autospazi sono $\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle$ e $\langle(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\rangle$; la matrice è pertanto diagonalizzabile e una matrice M avente quella proprietà è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.