

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO I - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. Notiamo che

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = S + N \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

con  $S$  semisemplice e  $N$  nilpotente ( $N^3 = 0$ ) ma non commutano. Perciò studiamo il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

dunque lo spettro di  $A$  sarà  $\Sigma(A) = \{-1, 2, 2\}$ , calcoliamo gli autospazi associati a ciascun autovalore.

$$E^*(-1) = \text{Ker}(A + \mathbf{1}) = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\}$$

Per  $\lambda = 2$  l'autospazio (generalizzato) è

$$\text{Ker}(A - 2\mathbf{1})^2 = \left\{ \left( \frac{t-s}{2}, t, s \right) \in \mathbb{R}^3 : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi una basa di autovettori è data da  $v = (0, 0, 1)$ ,  $u = (0, 1, 1)$ ,  $w = (1, 2, 0)$

Abbiamo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla teoria so che posso scrivere  $A$  come la somma di una matrice semisemplice e una nilpotente che commutano in modo da avere  $A = S + N$  e quindi  $\exp A = \exp(S + N) = (P \exp S_0 P^{-1}) \exp N$ .

Grazie alla scelta di  $P$  so che

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad S = P S_0 P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad N = A - S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp St = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 2e^{-t} - 2e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$\exp At = \exp St(\mathbf{1} + Nt) = \exp St \left( \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} & 0 \\ 2e^{-t} + (t-2)e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

La soluzione sarà quindi data da  $x = \exp At x_0$ .

ESERCIZIO 2.  $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x - y - z \\ \dot{z} = 2x - 2y \end{cases}$  : calcoliamo l'esponenziale della matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ :

$$p(\lambda) = 4\lambda - \lambda^3, V_0 = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} = \langle (1, 1, 0) \rangle, V_2 = \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} =$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (1, 0, 1) \rangle, V_{-2} = \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} = \langle (0, 1, 1) \rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \\
&\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \\
&\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} + 1 & 1 - e^{2t} & e^{2t} - 1 \\ 1 - e^{-2t} & e^{-2t} + 1 & e^{-2t} - 1 \\ e^{2t} - e^{-2t} & e^{-2t} - e^{2t} & e^{2t} + e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x_0(e^{2t}+1)+y_0(1-e^{2t})+z_0(e^{2t}-1)}{2} \\ \frac{x_0(1-e^{-2t})+y_0(e^{-2t}+1)+z_0(e^{-2t}-1)}{2} \\ \frac{x_0(e^{2t}-e^{-2t})+y_0(e^{-2t}-e^{2t})+z_0(e^{2t}+e^{-2t})}{2} \end{pmatrix}; \text{ per far vedere che il moto avviene su un pia-}
\end{aligned}$$

no notiamo che, nella base degli autovettori di  $A$ , il sistema diventa  $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = 0 \\ \dot{\bar{y}} = 2\bar{y} \\ \dot{\bar{z}} = -2\bar{z} \end{cases}$ , dove  $\bar{x}$ ,

$\bar{y}$  e  $\bar{z}$  sono le coordinate rispetto alla base di autovettori  $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ ; dalla prima delle tre equazioni si deduce chiaramente che  $\bar{x}(t) = \bar{x}(0)$  e quindi, in queste coordinate, il moto si svolge nel piano affine  $\bar{x} = \bar{x}(0)$ ; passando nelle coordinate standard abbiamo che  $(x, y, z) = \bar{x}(1, 1, 0) + \bar{y}(1, 0, 1) + \bar{z}(0, 1, 1) = (\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{z}, \bar{y} + \bar{z})$ , dunque  $\bar{x} = \frac{x + y - z}{2}$  e

quindi il piano diventa  $\frac{x + y - z}{2} = \frac{x_0 + y_0 - z_0}{2}$ , cioè  $x + y - z = x_0 + y_0 - z_0$ .

ESERCIZIO 3. Basta semplicemente notare che  $A$  si può già scrivere come  $S + N$ , dove

$$S = 4\mathbb{1} \text{ e } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e tale che } N^4 = 0$$

La soluzione è  $x(t) = \exp At x_0$  dove

$$\begin{aligned}
\exp At &= \exp St \left( \mathbb{1} + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} + \frac{N^3 t^3}{3!} \right) = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t - 4t^2 & -4t & 2t - \frac{3t^2}{2} - \frac{4t^3}{3} \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 2t & 1 & t + t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e^{4t} & (t - 4t^2)e^{4t} & -4te^{4t} & (2t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{4}{3}t^3)e^{4t} \\ 0 & e^{4t} & 0 & te^{4t} \\ 0 & 2te^{4t} & e^{4t} & (t + t^2)e^{4t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4.  $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (1, 1) \end{cases}$   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$ :  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - \alpha$ , che ha come radici

$1 \pm \sqrt{1 + \alpha}$  dunque se  $\alpha = -1$  la matrice ha un autovalore doppio, se  $\alpha > -1$  due autovalori reali distinti e se  $\alpha < -1$  due complessi coniugati; studiamo separatamente i tre casi:

$$\alpha = -1 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + N, \text{ con } N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ tale che } N^2 = 0, \text{ quindi}$$

$$e^{At} = e^{\mathbb{1}t}(\mathbb{1} + Nt) = e^t \begin{pmatrix} 1 - t & t \\ -t & t + 1 \end{pmatrix}, \text{ dunque } x(t) = (e^t, e^t).$$

$\alpha > -1$   $\alpha = -1 + c^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - 1 & 2 \end{pmatrix}$  ha per autovalori, come è stato visto in precedenza,  $1 \pm c$ ; cerchiamo i rispettivi autospazi:  $V_{c+1} =$

$$= \begin{cases} (-c-1)x + y = 0 \\ (c^2-1)x + (1-c)y = 0 \end{cases} = \langle (1, c+1) \rangle, V_{1-c} =$$

$$= \begin{cases} (c-1)x + y = 0 \\ (c^2-1)x + (c+1)y = 0 \end{cases} = \langle (1, 1-c) \rangle; \text{ dunque,}$$

$$\begin{pmatrix} c+1 & 0 \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c+1 & 1-c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2-1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c+1 & 1-c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$= A = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c+1 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c+1 & 0 \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c-1 & 1 \\ c+1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} =$$

$$= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c+1 & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(c+1)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-c)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c-1 & 1 \\ c+1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} (c-1)e^{(c+1)t} + (c+1)e^{(1-c)t} & e^{(c+1)t} - e^{(1-c)t} \\ (c^2-1)e^{(c+1)t} + (1-c^2)e^{(1-c)t} & (c+1)e^{(c+1)t} + (c-1)e^{(1-c)t} \end{pmatrix}, \text{ dunque}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{(c+1)t} + e^{(1-c)t}}{2}, & \frac{(c+1)e^{(c+1)t} + (1-c)e^{(1-c)t}}{2} \end{pmatrix}.$$

$\alpha < -1$   $\alpha = -1 - c^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 - 1 & 2 \end{pmatrix}$  ha per autovalori, come è stato visto in precedenza,  $1 \pm ic$ ; cerchiamo i relativi autospazi:  $V_{1+ic} =$

$$= \begin{cases} (-1-ic)x + y = 0 \\ (-c^2-1)x + (1-ic)y = 0 \end{cases} = \langle (1, 1+ic) \rangle \Rightarrow V_{1-ic} = \langle (1, 1-ic) \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2-1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & \frac{1}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(ct) & -\sin(ct) \\ \sin(ct) & \cos(ct) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & \frac{1}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^t}{c} \begin{pmatrix} c \cos(ct) - \sin(ct) & \sin(ct) \\ (-c^2-1) \sin(ct) & c \cos(ct) + \sin(ct) \end{pmatrix}, \text{ dunque } x(t) =$$

$$= (e^t \cos(ct), e^t (\cos(ct) - c \sin(ct))).$$

ESERCIZIO 5.  $\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n \\ \dots \\ \dot{x}_n = 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n \end{cases}$

posto  $y = x_1 + \dots + x_n$  si ottiene  $\dot{y} = \dot{x}_1 + \dots + \dot{x}_n = (2x_1 + \dots + 2x_n) + \dots + (2x_1 + \dots + 2x_n) = 2ny$ , inoltre si ha  $y(0) = x_1(0) + \dots + x_n(0) = 2n$ , quindi  $y(t) = 2ne^{2nt}$ ; a questo punto notiamo semplicemente che,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,

si ha  $\begin{cases} \dot{x}_i = 2y = 4ne^{2nt} \\ x_i(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t 4ne^{2ns} ds = 2e^{2nt}$ . (Si poteva ottenere lo stesso

risultato calcolando  $e^{At}$  con il risultato del prossimo esercizio.)

ESERCIZIO 6.  $A^n = \lambda A$ ; mostriamo per induzione che  $\forall k \in \mathbb{N}$  si ha  $A^{(n-1)k+1} = \lambda^k A$ : per  $k = 0$  è ovvio, supponiamo che sia vero per  $k$  e dimostriamolo per  $k + 1$ :  $A^{(k+1)(n-1)+1} = A^{kn+n-k} = A^{kn-k} A^n = A^{(n-1)k} \lambda A = \lambda A^{(n-1)k+1} =$

$= \lambda^{k+1} A$ ; da ciò deriva che  $A^{(n-1)k+j} = A^{(n-1)k+1} A^{j-1} = \lambda^k A A^{j-1} = \lambda^k A^j$ , dunque

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{I} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(n-1)k+1}}{((n-1)k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(n-1)k+2}}{((n-1)k+2)!} +$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(n-1)k+n-1}}{((n-1)k+n-1)!} = \mathbb{I} + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{((n-1)k+1)!} + \\
& + A^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{((n-1)k+2)!} + \cdots + A^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{((n-1)k+n-1)!} = \mathbb{I} + c_1 A + \\
& + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}, \text{ ove } c_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{((n-1)k+j)!} \quad \forall j = 1, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO 2 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.  $\begin{cases} \ddot{x} + \lambda x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$  : cerchiamo innanzi tutto le soluzioni di  $\ddot{x} + \lambda x = 0$  e poi

imponiamo le condizioni iniziali; studiamo separatamente i tre casi a seconda del segno di  $\lambda$ .

$\lambda = 0$  L'equazione diventa  $\ddot{x} = 0$  che ha per soluzioni  $x(t) = at + b$ , al variare dei parametri reali  $a$  e  $b$ ; imponendo le condizioni iniziali otteniamo  $\begin{cases} x(0) = b = 0 \\ x(1) = a + b = 0 \end{cases}$ , che ha come unica soluzione  $a = 0 = b$ , dunque in questo caso l'unica soluzione è quella banale  $x(t) = 0 \forall t$ .

$\lambda < 0$  L'equazione ha per soluzione una combinazione di esponenziali reali del tipo  $x(t) = ae^{\sqrt{-\lambda}t} + be^{-\sqrt{-\lambda}t}$ ; imponendo le condizioni iniziali otteniamo  $\begin{cases} x(0) = a + b = 0 \\ x(1) = ae^{\sqrt{-\lambda}} + be^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$  : essendo  $\sqrt{-\lambda} \neq 0$ , si ha che  $e^{\sqrt{-\lambda}} \neq e^{-\sqrt{-\lambda}}$ , dunque le due equazioni sono indipendenti e quindi il sistema ha come unica soluzione  $a = 0 = b$ , quindi anche in questo caso abbiamo solo la soluzione banale  $x(t) = 0 \forall t$ .

$\lambda > 0$  L'equazione ha per soluzione una combinazione di funzioni trigonometriche del tipo  $x(t) = a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \sin(\sqrt{\lambda}t)$ ; imponendo le condizioni iniziali otteniamo  $\begin{cases} x(0) = a = 0 \\ x(1) = a \cos \sqrt{\lambda} + b \sin \sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$  : dalla prima equazione si ricava che  $a = 0$ , dunque la seconda diventa  $b \sin \sqrt{\lambda} = 0$ , che si annulla, oltre che per  $b = 0$  (soluzione banale), anche per  $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ , cioè per  $\sqrt{\lambda} \in \pi\mathbb{Z}$ ; dunque, in questo caso esistono soluzioni banali per  $\lambda = n^2\pi^2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  e, per questi  $\lambda$ , le soluzioni non banali sono  $x(t) = b \sin(n\pi t) \forall b \in \mathbb{R}$ .

ESERCIZIO 2. Cominciamo con lo studiare il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

le cui radici sono

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2.$$

Quindi la soluzione generale è  $x(t) = ae^t + (b + ct)e^{2t}$ .

Imponiamo i dati iniziali per determinare  $a, b, c$ .

$$\begin{cases} x(0) = a + b = 1 \\ \dot{x}(0) = a + c + 2b = 0 \\ \ddot{x}(0) = a + 4c + 4b = 2 \end{cases}$$

Abbiamo  $c = 4, b = -5, a = 6$ , quindi

$$x(t) = 6e^t + (-5 + 4t)e^{2t}$$

Si poteva anche procedere definendo  $\xi(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \ddot{x} \end{cases}$$

quindi risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \xi(t) = A\xi, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}, \quad \xi_0 = (1, 0, 2)$$

ESERCIZIO 3. Consideriamo il caso  $\varepsilon = 0$ . Avremo

$$\begin{cases} \ddot{x} - 4x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

che si può risolvere studiando il polinomio caratteristico  $\lambda^2 - 4 = 0$  e si ottiene che  $x(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$  e imponendo i dati iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = a + b = 1 \\ \dot{x}(0) = 2a - 2b = 0 \end{cases}$$

quindi  $a = b = \frac{1}{2}$ .

Per  $\varepsilon > 0$  consideriamo la sostituzione  $\dot{x} = y$  e riscriviamo tutto come il sistema non omogeneo

$$\dot{\xi} = A\xi + B(t), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon e^t \end{pmatrix}.$$

In questo caso il polinomio caratteristico del sistema omogeneo associato è

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda B) = \lambda^2 - \varepsilon\lambda - 4 = 0$$

quindi  $\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{2}$  che sono reali e distinti indipendentemente dal valore assunto da  $\varepsilon$ ; calcoliamo gli autospazi e otteniamo

$$E^*\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{2}\right) = \left\{ \left( t, \frac{t\varepsilon}{2} + \frac{t\sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{2} \right) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E^*\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{2}\right) = \left\{ \left( t, \frac{t\varepsilon}{2} - \frac{t\sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{2} \right) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Allora

$$\exp At = Q^{-1} \exp \tilde{S} t Q, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{2} & \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{-\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 + 16}} + \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + 16}} \\ \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 + 16}} + \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon^2 + 16}} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\exp At = \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{1}{2}t(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 16})}(\varepsilon - \varepsilon e^{t\sqrt{\varepsilon^2 + 16}} + (1 + e^{t\sqrt{\varepsilon^2 + 16}})\sqrt{\varepsilon^2 + 16})}{4e^{\frac{1}{2}t(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 16})}(-1 + e^{t\sqrt{\varepsilon^2 + 16}})} \frac{2\sqrt{\varepsilon^2 + 16}}{\sqrt{\varepsilon^2 + 16}} & \frac{e^{\frac{1}{2}t(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 16})}(-1 + e^{t\sqrt{\varepsilon^2 + 16}})}{\sqrt{\varepsilon^2 + 16}} \\ e^{\frac{1}{2}t(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 16})}((-1 + e^{t\sqrt{\varepsilon^2 + 16}})\varepsilon + (1 + e^{t\sqrt{\varepsilon^2 + 16}})\sqrt{\varepsilon^2 + 16}) & \frac{e^{\frac{1}{2}t(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 16})}(-1 + e^{t\sqrt{\varepsilon^2 + 16}})}{2\sqrt{\varepsilon^2 + 16}} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\xi(t) = \exp At \left( \xi_0 + \int_0^t ds \exp(-As) B(s) \right)$$

da cui troviamo che la soluzione del problema di Cauchy corrisponde alla prima riga del vettore  $\xi(t)$ .

ESERCIZIO 4. Il sistema è del tipo

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + B(t) \\ z(0) = (1, 0) \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -3 \sin t \end{pmatrix}$$

Osserviamo che  $A$  è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

quindi possiamo calcolare immediatamente il suo esponenziale ottenendo

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Inoltre notiamo che  $\exp(At)$  è una matrice di rotazione e quindi

$$[\exp(At)]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema non omogeneo sarà quindi

$$z(t) = \exp(At)[c(t) + z(0)]$$

con  $c(t)$  tale che

$$\dot{c}(t) = [\exp(At)]^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ -3 \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4\sin^2 t \\ -4 \cos t \sin t \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} c_1(t) = \int_0^t ds(1 - 4\sin^2 t) = -t + \sin 2t \\ c_2(t) = \int_0^t ds(-2 \sin 2t) = \cos 2t \end{cases}$$

Quindi la soluzione del sistema è

$$z(t) = \exp(At)[c(t) + z(0)] = \begin{pmatrix} \cos t(1 - t \sin 2t) - \sin t \cos 2t \\ \sin t(1 - t \sin 2t) + \cos t \cos 2t \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 5.  $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3$ : se  $\det A = 0$ , allora le righe della matrice  $A$  sono vet-

tori linearmente dipendenti in  $\mathbb{R}^3$ , dunque esiste una combinazione lineare non banale  $c_1 A^{(1)} + c_2 A^{(2)} + c_3 A^{(3)} = 0$ , ove  $A^{(i)}$  indica l' $i$ -esima riga della matrice; dunque, essendo  $\dot{x}_i = \langle A^{(i)}, x \rangle$  per  $i = 1, 2, 3$ , allora  $c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 + c_3 \dot{x}_3 = c_1 \langle A^{(1)}, x \rangle + c_2 \langle A^{(2)}, x \rangle + c_3 \langle A^{(3)}, x \rangle = \langle c_1 A^{(1)} + c_2 A^{(2)} + c_3 A^{(3)}, x \rangle = 0$ , dunque  $\frac{d}{dt} c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$ , ovvero la quantità  $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$  è costante per ogni tempo (quindi pari al valore assunto all'istante  $t = 0$ ), che equivale a dire che il moto avviene sul piano affine  $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) + c_3 x_3(0)$ .

ESERCIZIO 6.  $\dot{x} = x + f(t)$ ; cerchiamo una soluzione del tipo  $x(t) = c(t)e^t$ : si avrà  $f(t) = \dot{x}(t) - x(t) = e^t(c(t) + c'(t)) - e^t c(t) = e^t c'(t) \Rightarrow c'(t) = e^{-t} f(t) \Rightarrow c(t) = k + \int_0^t e^{-s} f(s) ds \Rightarrow x(t) = e^t \left( k + \int_0^t e^{-s} f(s) ds \right)$ ; imponendo i dati iniziali si trova che  $k = x_0$  e dunque  $x(t) = e^t \left( x_0 + \int_0^t e^{-s} f(s) ds \right)$ .

Procediamo per induzione: per  $k = 1$  abbiamo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ x_1(0) = 1 \end{cases}, \text{ che ha per soluzione } x_1(t) = e^t = e^t \sum_{j=0}^0 \frac{t^j}{j!}; \text{ supponiamo ora che l'enunciato sia}$$

vero per  $k$ , cioè che  $x_k(t) = e^t \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!}$ ; allora l'equazione per  $x_{k+1}$  diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1} = x_{k+1} + e^t \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \\ x_{k+1}(0) = 1 \end{cases},$$

che si può risolvere con il metodo visto in precedenza:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) &= e^t \left( 1 + \int_0^t e^{-s} \left( e^s \sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^j}{j!} \right) ds \right) = e^t \left( 1 + \right. \\ &+ \left. \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \int_0^t s^j ds \right) = e^t \left( 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^{j+1}}{j!(j+1)} \right) = e^t \left( 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \right) = \\ &= e^t \left( 1 + \sum_{j=1}^k \frac{t^j}{j!} \right) = e^t \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}. \end{aligned}$$

$$\text{Infine, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^t \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} = e^t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} = e^t e^t = e^{2t}.$$



**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO 3 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.  $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 2tx + t^2 - 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$  : come da suggerimento, applichiamo il cambio di va-

riabile  $y = x + t$ ; essendo  $\dot{y} = \dot{x} + 1$  e  $y(0) = x(0) + 0 = x(0)$ , il problema diventa  $\begin{cases} \dot{y} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ,

che si risolve per separazione di variabili:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y^2(t)} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{y(s)}{y^2(s)} = \int_0^t ds = t \stackrel{y=y(s)}{\Rightarrow} \int_1^{y(t)} \frac{dy}{y^2} = t \Rightarrow 1 - \frac{1}{y(t)} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t} \Rightarrow x(t) = y(t) - t = \frac{1}{1-t} - t.$$

ESERCIZIO 2. Posto  $y = tx$  abbiamo che

$$\dot{y} = x + t\dot{x} = x + \frac{1 - tx^2e^t}{txe^t} = \frac{x^2te^t + 1 - x^2te^t}{txe^t}$$

quindi risolviamo, per separazione delle variabili,

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{1}{ye^t} \\ y(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \int_2^{y(t)} zdz = \int_1^t e^{-s} ds$$

e troviamo

$$y(t) = \sqrt{2(e^{-1} - e^{-t} + 2)}$$

che è definita per  $t > \log(2 + e^{-1})^{-1}$

Quindi  $x(t) = \frac{\sqrt{2(e^{-1} - e^{-t} + 2)}}{t}$

ESERCIZIO 3.  $\begin{cases} \dot{x} = \frac{t}{x(2t^2 - t^4 - 2)} \\ x(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$  : risolviamo per separazione di variabili;  $x(t)\dot{x}(t) =$

$$= \frac{t}{2t^2 - t^4 - 2} \Rightarrow \int_0^t x(s)\dot{x}(s) = \int_0^t \frac{s}{2s^2 - s^4 - 2} \stackrel{x=x(s)}{\Rightarrow} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{x(t)} x dx =$$

$$= - \int_0^t \frac{s}{(1-s^2)^2 + 1} \stackrel{u=1-s^2}{\Rightarrow} \frac{x^2(t)}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \int_0^{1-t^2} \frac{du}{u^2 + 1} \Rightarrow x^2(t) - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \arctan(1-t^2) - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x(t) = \sqrt{\arctan(1-t^2)}, \text{ dove è stato scelto il segno positivo della ra-}$$

dice per rispettare le condizioni iniziali; la funzione  $x(t) = \sqrt{\arctan(1-t^2)}$  è definita quando l'argomento della radice è non negativo e quindi (essendo  $\arctan y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ ) per  $t \in [-1, 1]$ ;

tuttavia, la funzione non è derivabile in  $t = \pm 1$ , perché  $\frac{d}{dt} \sqrt{\arctan(1-t^2)} =$

$$= \frac{t}{(2t^2 - t^4 - 2)\sqrt{\arctan(1-t^2)}} \stackrel{t \rightarrow \pm 1}{\rightarrow} \mp \infty; \text{ dunque, è necessario escludere gli estremi dell'in-}$$

tervallo e quindi l'intervallo massimale in cui la soluzione è derivabile è  $(-1, 1)$ .

ESERCIZIO 4. Posto  $y = 2x + t$ , e dato che  $\dot{x} = (2x + t)^2 - \frac{1}{2}$  e  $y(0) = 2x(0)$  avremo

$$\begin{cases} \dot{y} = 2y^2 \\ y(0) = 2\alpha \end{cases}$$

Se  $\alpha = 0$  troviamo la soluzione identicamente nulla  $y(t) = 0$  e quindi la soluzione del problema iniziale è  $x(t) = -\frac{t}{2}$  definita per ogni tempo  $t \in \mathbb{R}$ .

Se  $\alpha \neq 0$  allora risolvendo per separazione dei variabili troviamo

$$\int_{2\alpha}^{y(t)} \frac{d\xi}{\xi^2} = \int_0^t 2ds$$

e quindi  $-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{2\alpha} = 2t$  cioè  $y(t) = \frac{2\alpha}{1-4\alpha t}$  e  $x(t) = \frac{\alpha}{1-4\alpha t} - \frac{t}{2}$  che è definita per  $t \in (-\infty, \frac{1}{4\alpha})$  se  $\alpha > 0$  e in  $(\frac{1}{4\alpha}, +\infty)$  se  $\alpha < 0$

**Esercizio 5.**  $\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$  : determiniamo innanzi tutto l'insieme di tutte le soluzioni di

$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ ; questo sarà dato dall'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata (cioè  $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ ) a cui verrà sommata una soluzione particolare, che cercheremo del tipo  $\bar{x}(t) = c_1(t) \cos(\omega t) + c_2(t) \sin(\omega t)$ : si avrà dunque

$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{c}_1(t) \cos(\omega t) - \omega c_1(t) \sin(\omega t) + \dot{c}_2(t) \sin(\omega t) + \omega c_2(t) \cos(\omega t)$ ; se imponiamo ora le condizione  $\dot{c}_1(t) \cos(\omega t) + \dot{c}_2(t) \sin(\omega t) = 0$ , otteniamo che

$$\begin{aligned} f(t) = \ddot{\bar{x}}(t) + \omega^2 \bar{x}(t) &= \omega^2 (c_1(t) \cos(\omega t) + c_2(t) \sin(\omega t)) + \frac{d}{dt} (-\omega c_1(t) \sin(\omega t) + \\ &+ \omega c_2(t) \cos(\omega t)) = \omega^2 c_1(t) \cos(\omega t) + \omega^2 c_2(t) \sin(\omega t) - \omega \dot{c}_1(t) \sin(\omega t) - \\ &- \omega^2 c_1(t) \cos(\omega t) + \omega \dot{c}_2(t) \cos(\omega t) - \omega^2 c_2(t) \sin(\omega t) = \omega \dot{c}_2(t) \cos(\omega t) - \\ &- \omega \dot{c}_1(t) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Dunque,  $\dot{c}_1(t)$  e  $\dot{c}_2(t)$  si possono trovare facilmente risolvendo il sistema lineare  $\begin{cases} \dot{c}_1(t) \cos(\omega t) + \dot{c}_2(t) \sin(\omega t) = 0 \\ \omega \dot{c}_2(t) \cos(\omega t) - \omega \dot{c}_1(t) \sin(\omega t) = f(t) \end{cases}$ , cioè  $\dot{c}_1(t) = -\frac{f(t) \sin(\omega t)}{\omega (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = -\frac{1}{\omega} f(t) \sin(\omega t)$

$$\text{e } \dot{c}_2(t) = \frac{f(t) \cos(\omega t)}{\omega (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} =$$

$$= \frac{1}{\omega} f(t) \cos(\omega t), \text{ dunque la soluzione particolare sarà } \bar{x}(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \int_0^t f(s) \cos(\omega s) ds -$$

$$- \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \int_0^t f(s) \sin(\omega s) ds, \text{ quindi l'integrale generale è } x(t) = a \cos(\omega t) +$$

$$+ b \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \int_0^t f(s) \cos(\omega s) ds - \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \int_0^t f(s) \sin(\omega s) ds, \text{ con } a \text{ e } b \text{ che vengono determinati imponendo le condizioni iniziali:}$$

$$x(0) = a, \dot{x}(t) = -a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) + \cos(\omega t) \int_0^t f(s) \cos(\omega s) ds + \frac{1}{\omega} f(t) \sin(\omega t) \cos(\omega t) +$$

$$+ \sin(\omega t) \int_0^t f(s) \sin(\omega s) ds - \frac{1}{\omega} f(t) \sin(\omega t) \cos(\omega t) \Rightarrow \dot{x}(0) = b, \text{ quindi essendo entrambe le condizioni iniziali del problema nulle, troviamo che } a = 0 = b, \text{ e dunque la soluzione del problema}$$

$$\text{è } \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \int_0^t f(s) \cos(\omega s) ds -$$

$$- \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \int_0^t f(s) \sin(\omega s) ds = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) (\sin(\omega t) \cos(\omega s) - \cos(\omega t) \sin(\omega s)) ds =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin(\omega(t-s)) ds.$$

**Esercizio 6.** Cominciamo col risolvere l'equazione omogenea associata. Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4,$$

le cui radici sono

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2i.$$

La soluzione dell'omogenea è quindi

$$x_0(t) = ae^t + b \cos 2t + c \sin 2t.$$

Cerchiamo ora la soluzione del problema di Cauchy con il metodo di variazione delle costanti. Cerchiamo quindi funzioni  $a(t), b(t), c(t)$  tali che

$$\bar{x}(t) = a(t)e^t + b(t) \cos 2t + c(t) \sin 2t$$

risolve il problema differenziale non omogeneo. Derivando tale espressione otteniamo

$$\dot{\bar{x}} = \dot{a}e^t + ae^t + \dot{b} \cos 2t - 2b \sin 2t + \dot{c} \sin 2t + 2c \cos 2t$$

Poichè cerchiamo una soluzione particolare del problema, possiamo imporre

$$\dot{a}e^t + \dot{b} \cos 2t + \dot{c} \sin 2t = 0$$

Derivando una seconda volta otteniamo

$$\ddot{\bar{x}}(t) = \dot{a}e^t + ae^t - 2\dot{b} \sin 2t - 4b \cos 2t + 2\dot{c} \cos 2t - 4c \sin 2t$$

e imponiamo

$$\dot{a}e^t - 2\dot{b} \sin 2t - 2c \cos 2t = 0$$

derivando un'ultima volta abbiamo

$$\ddot{\bar{x}}(t) = \dot{a}e^t + ae^t - 4\dot{b} \cos 2t + 8b \sin 2t - 4\dot{c} \sin 2t - 8c \cos 2t$$

Sostituendo  $\bar{x}$  nell'equazione non omogenea troviamo

$$\begin{cases} \dot{a}e^t - 4\dot{b} \cos 2t - 4\dot{c} \sin 2t = 3e^t \\ \dot{a}e^t + \dot{b} \cos 2t + \dot{c} \sin 2t = 0 \\ \dot{a}e^t - 2\dot{b} \sin 2t - 2c \cos 2t = 0 \end{cases}$$

Per le condizioni imposte abbiamo

$$\dot{a}e^t = 2\dot{b} \sin 2t + 2c \cos 2t \quad \dot{b} = \frac{-\dot{c}(\sin 2t - 2 \cos 2t)}{(2 \sin 2t + \cos 2t)}$$

Sostituendo nella prima si ottiene

$$\frac{-10\dot{c}}{(2 \sin 2t + \cos 2t)} = 3e^t$$

e quindi

$$\begin{cases} \dot{c} = \frac{3e^t(2 \sin 2t + \cos 2t)}{-10} \\ \dot{b} = \frac{3}{10}e^t(\sin 2t - 2 \cos 2t) \\ \dot{a} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

e integrando

$$\begin{cases} c(t) = \frac{-3}{10} \left[ \frac{4e^t \sin 2t}{5} - \frac{3}{5}e^t \cos 2t + \frac{3}{5} \right] \\ b(t) = \frac{3}{10} \left[ \frac{-3e^t \sin 2t}{5} - \frac{4e^t \cos 2t}{5} \right] \\ a(t) = \frac{3}{5}t \end{cases}$$

Pertanto la soluzione generale del problema non omogeneo è

$$\bar{x}(t) = \frac{3}{5}te^t + b(t) \cos 2t + c(t) \sin 2t = \frac{3}{5}te^t - \frac{6}{25}e^t - \frac{9}{25} \sin 2t$$

Imponiamo ora il dato iniziale:

$$\begin{cases} x(0) = a + b = 0 \\ \dot{x}(0) = a + 2c = 1 \\ \ddot{x}(0) = a - 4b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = \frac{-2}{5} \\ c = \frac{3}{10} \end{cases}$$

Allora

$$x(t) = \frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5} \cos 2t + \frac{3}{10} \sin 2t + \bar{x}(t).$$

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO 4 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.  $\begin{cases} \dot{x} = 2y(1-x^2) \\ \dot{y} = 2x(y^2-1) \end{cases} :$

1. Cerchiamo una funzione  $H(x, y)$  tale che valga  $\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} :$

si avrà dunque  $H(x, y) = \int \dot{x} dy = \int_c^y 2y(1-x^2) dy = y^2(1-x^2) + c_1(x)$ ; determiniamo  $c_1(x)$  imponendo l'altra condizione:  $2xy^2 - \dot{c}_1(x) =$

$$= -\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{y} = 2x(y^2-1) \Rightarrow -\dot{c}_1(x) = -2x \Rightarrow c_1(x) = x^2 + c \Rightarrow$$

$\Rightarrow H(x, y) = y^2(1-x^2) + x^2 + c = x^2 + y^2 - x^2y^2 + c$ : imponendo la condizione  $H(x, y) = 0$  otteniamo  $c = 0$  e cioè  $H(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$ .

2. Per determinare i punti di equilibrio, risolviamo il sistema  $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$ , ovvero  $\begin{cases} 2y(1-x^2) = 0 \\ 2x(y^2-1) = 0 \end{cases}$  ;

dalla prima equazione ricaviamo che  $y = 0$  oppure  $x = \pm 1$ : se  $y = 0$ , sostituendo nella seconda equazione troviamo  $-2x = 0$  e dunque l'origine è un punto di equilibrio; se invece  $x = \pm 1$  otteniamo  $\pm(y^2-1) = 0$ , ovvero  $y = \pm 1$ , e quindi abbiamo trovato altri quattro punti di equilibrio:  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(-1, -1)$ . Per discutere la stabilità di questi p.d.e., proviamo a ricavare informazioni dal sistema linearizzato: la matrice è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} 2y(1-x^2) & \frac{\partial}{\partial y} 2y(1-x^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} 2x(y^2-1) & \frac{\partial}{\partial y} 2x(y^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4xy & 2(1-x^2) \\ 2(y^2-1) & 4xy \end{pmatrix}; \text{ notiamo che}$$

$A(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ , che ha per autovalori  $\lambda = \pm 4$  e quindi, essendoci almeno un autovalore con parte reale strettamente negativa, i due punti sono instabili; analogamente, sono instabili anche i punti  $(\pm 1, \mp 1)$  perché  $A(\pm 1, \mp 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ; per l'origine invece

non possiamo dire nulla perché  $A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$  ha per autovalori  $\lambda = \pm 2i$ ; tuttavia, notiamo che l'origine è un punto di minimo per la funzione  $H(x, y)$ , perchè la matrice Hessiana nel punto  $(x, y)$  vale  $\begin{pmatrix} 2(1-y^2) & -4xy \\ -4xy & 2(1-x^2) \end{pmatrix}$ , e dunque calcolata nell'origine

è  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , che ovviamente è definita positiva; dunque, possiamo applicare il teorema di Ljapunov usando come funzione di Ljapunov  $W(x, y) = H(x, y)$  per concludere che l'origine è un punto di equilibrio stabile.

3. Essendo la funzione  $H(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y^2 = 0$  una costante del moto, le traiettorie del sistema saranno le curve di livello  $\Gamma_c =$   
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = c\}$ : studiamo innanzi tutto le separatrici, cioè le curve di livello dei p.d.e. instabili:  $H(\pm 1, \pm 1) = H(\pm 1, \mp 1) = 1$ , dunque questi punti si trovano sull'insieme  $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - x^2y^2 = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1-x^2)(1-y^2)\}$ , che è costituito dall'unione delle quattro rette  $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ ,  $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\}$ ,  $C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$ ,

$C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$ ; ognuna di queste quattro rette è costituita da tre orbite asintotiche (il segmento tra due p.d.e. e le due semirette), che tenderanno a un p.d.e. instabili nel passato e/o nel futuro; le altre curve di livello possono essere tracciate per continuità, sfruttando il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali.

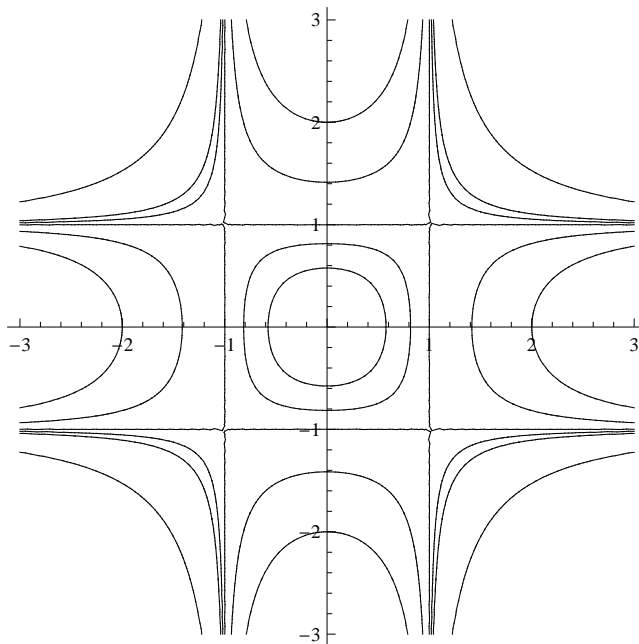


Figura 1: Curve di livello della funzione  $H(x, y) = x^2 + y^2 - x^2 y^2$

Troviamo ora i versi di percorrenza delle curve: ci basterà studiarlo su una curva, poi tutti gli altri saranno determinati per continuità grazie al teorema di dipendenza differenziale dai dati iniziali; consideriamo ad esempio la retta  $\{x = 1\}$ : lungo questa curva si ha  $\dot{y} = 2x(y^2 - 1) = 2(y^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow |y| > 1$ , quindi il moto sarà diretto verso l'alto sulle semirette  $\{y > 1\}$  e  $\{y < -1\}$  e verso il basso sul segmento  $\{-1 < y < 1\}$ .

4. Notiamo che la regione  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$  è racchiusa all'interno della curva di livello  $\Gamma_1$  e contiene un'unico punto di equilibrio, l'origine, che è stabile, quindi ogni dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A \setminus \{(0, 0)\}$  da origine a una traiettoria periodica; inoltre, queste sono le uniche traiettorie periodiche, perché all'infuori di questa regione almeno una tra  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  assume sempre lo stesso segno e dunque le traiettorie non si possono chiudere. In particolare,  $(\frac{1}{2}, 0) \in A$ , dunque la traiettoria con questo dato iniziale è periodica; possiamo scrivere il periodo  $T$  come la somma di  $T_1$  e  $T_2$ , ove il primo è il tempo necessario a raggiungere nuovamente l'asse delle  $x$  e  $T_2$  quello per tornare indietro: notiamo che  $H(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}$ , dunque il punto appartiene alla curva  $\Gamma_{\frac{1}{4}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - x^2 y^2 = \frac{1}{4}\}$ ; questa curva è costituita dall'unione dei grafici delle funzioni  $y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-4x^2}{1-x^2}}$  e  $y = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-4x^2}{1-x^2}}$  e dunque l'altro punto in cui attraversa l'asse  $x$  è  $(-\frac{1}{2}, 0)$ ; il moto da  $(\frac{1}{2}, 0)$  verso  $(-\frac{1}{2}, 0)$  avviene lungo la seconda delle due curve, per cui  $\dot{x} = -\frac{1}{2}(1-x^2) \sqrt{\frac{1-4x^2}{1-x^2}} = \frac{\sqrt{(1-4x^2)(1-x^2)}}{2}$ , quindi  $T_1 =$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{T_1} dt = -2 \int_0^{T_1} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{(1-4x^2(t))(1-x^2(t))}} dt \stackrel{x(t)=x}{=} \\
&= -2 \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-4x^2)(1-x^2)}} = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-4x^2)(1-x^2)}}; \text{ analogamente si mostra che} \\
T_2 &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-4x^2)(1-x^2)}}, \text{ dunque } T = T_1 + \\
+T_2 &= 8 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-4x^2)(1-x^2)}}.
\end{aligned}$$

5. Innanzi tutto, notiamo che la traiettoria con dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$  si svolge lungo la retta verticale  $\{x = 1\}$  e cioè  $x(t) = 1 \forall t$ , quindi la seconda equazione del sistema diventa

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= 2(y^2 - 1), \text{ che si risolve per separazione di variabili: } \frac{\dot{y}(t)}{y^2(t) - 1} = 2 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{y^2(s) - 1} = \int_0^t 2s \stackrel{y(s)=t}{\Rightarrow} \\
\Rightarrow 2t &= \int_0^{y(t)} \frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \int_0^{y(t)} \frac{dy}{y-1} - \frac{1}{2} \int_0^{y(t)} \frac{dy}{y+1} = \frac{1}{2} \log(1-y(t)) - \\
&-\frac{1}{2} \log(y(t)+1) \Rightarrow 4t = \log\left(\frac{1-y(t)}{y(t)+1}\right) \Rightarrow e^{4t} = \frac{1-y(t)}{y(t)+1} = \frac{2}{y(t)+1} - \\
-1 &\Rightarrow \frac{y(t)+1}{2} = \frac{1}{e^{4t}+1} \Rightarrow y(t) = \frac{2}{e^{4t}+1} - 1 = \frac{1-e^{4t}}{e^{4t}+1}. \text{ (Si noti che sono stati tolti} \\
&\text{i moduli dell'argomento del logaritmo sapendo che il moto si svolgeva sul segmento} \\
&\{-1 < y < 1\}).
\end{aligned}$$

**ESERCIZIO 2.** (2.1) **Costante del moto.** Condizione sufficiente affinché una funzione  $H(x, y)$  sia una costante del moto è

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo

$$H(x, y) = \int dy(x^3 + 9y^2x - x) = x^3y + 3y^3x - xy + f(x)$$

Per determinare  $f(x)$  derivo rispetto a  $x$  ottenendo

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 3x^2y + 3y^3 - y + f'(x)$$

Basta porre  $f'(x) = 0$ , cioè  $f(x) = c$ , per avere

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y}$$

Quindi una costante del moto è

$$H(x, y) = x^3y + 3y^3x - xy = xy(x^2 + 3y^2 - 1)$$

avendo imposto  $c = 0$  (2.2) **Punti di equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x(x^2 + 9y^2 - 1) = 0 \\ y(3x^2 + 3y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo la prima, se  $x = 0$  otteniamo  $y = 0$  o  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , mentre se  $x^2 = 1 - 9y^2$  allora si deve avere nella seconda che  $y(2 - 24y^2) = 0$ , che si ha o per  $y = 0$  e quindi  $x = \pm 1$  oppure per  $y = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$  con  $x = \pm \frac{1}{2}$ . Abbiamo perciò i punti di equilibrio

$$P_0 = (0, 0), \quad P_{1,2} = (0, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad P_{3,4} = (\pm 1, 0), \quad P_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}), \quad P_6 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}),$$

$$P_7 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}), \quad P_8 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}).$$

Studiamone la stabilità considerando la matrice del sistema linearizzato

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 9y^2 - 1 & 18xy \\ -6xy & -3x^2 - 9y^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Vediamo cosa succede intorno ai punti di equilibrio.

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha un autovalore strettamente positivo quindi  $P_0$  è instabile.

$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

quindi  $P_{3,4}$  sono instabili e ugualmente notiamo che anche  $P_{1,2}$  sono instabili perchè

$$A(0, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ha un autovalore strettamente positivo. Invece, visto che

$$A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}) = A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2$  e quindi gli autovalori hanno entrambi parte reale nulla, non possiamo dire nulla sulla stabilità dei punti  $P_5$  e  $P_8$ . Lo stesso vale per i punti  $P_6$  e  $P_7$ . Si può studiare la stabilità cercando una funzione di Ljapunov. Per i punti  $P_5$  e  $P_8$  definiamo  $W(x, y) = H(x, y) - H(P_5)$  o  $W(x, y) = H(x, y) - H(P_8)$ . Notiamo che

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

Allora visto che l'hessiano di  $W$  è lo stesso di  $H$  per come è stata definita  $W$  e ricordando che la matrice  $A(P_5) = A(P_8)$  abbiamo che

$$\mathcal{H}(P_5) = \mathcal{H}(P_8) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

che ha due autovalori positivi quindi ho trovato una funzione di Ljapunov perciò  $P_5$  e  $P_8$  sono stabili.

Facendo lo stesso ragionamento per i punti  $P_6$  e  $P_7$  si nota che  $W(x, y) = -H(x, y) + H(P_6)$  e  $W(x, y) = -H(x, y) + H(P_7)$  sono rispettivamente funzioni di Ljapunov per i due punti, quindi sono stabili. (2.3) **Curve di livello.** Studiamo la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy(x^2 + 3y^2 - 1) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

dove

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 - 1 = 0\}$$



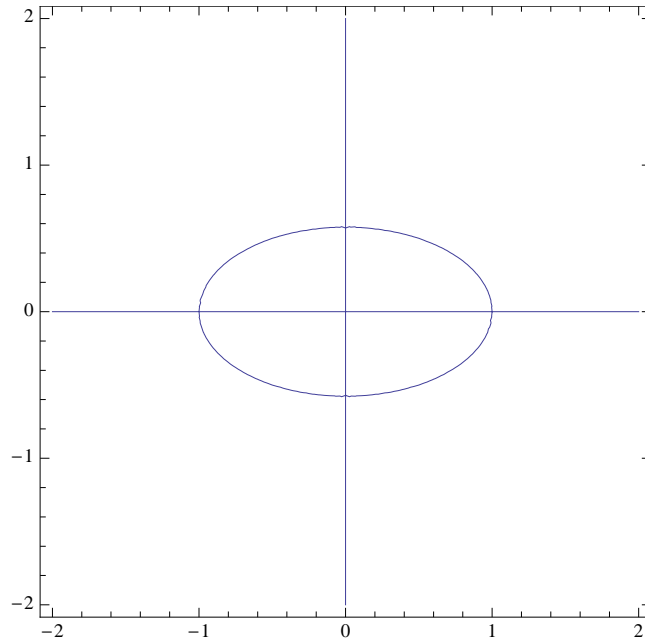


Figura 2: Grafico della curva di livello  $\Gamma_0$

Per dipendenza continua dal dato iniziale troviamo quindi le altre curve di livello

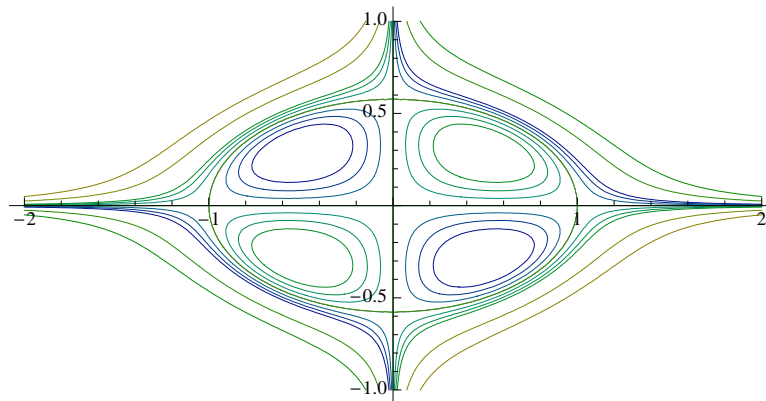


Figura 3: Piano delle fasi per il sistema

**Versi di percorrenza** Analizziamo i versi di percorrenza sulla curva  $\Gamma_0$ , quindi su  $y = 0$  abbiamo che  $\dot{x} > 0$  se  $x > 1$  o se  $-1 < x < 0$ ,  $\dot{x} < 0$  altrimenti. Su  $x = 0$   $\dot{y} > 0$  per  $y < -\frac{1}{2}$  o  $0 < y < \frac{1}{2}$ . Possiamo ottenere le velocità sulle altre curve di livello per dipendenza differenziabile dai dati iniziali.

(2.4) **Traiettorie periodiche** Sappiamo che se esiste una regione  $U$  che sia racchiusa in una componente connessa di una curva di livello chiusa di  $H$  che contenga un unico punto di equilibrio  $z_0$  che sia stabile, allora ogni traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$ , con  $\bar{x} \in U \setminus \{z_0\}$  è periodica e si svolge su

un'orbita che contiene  $z_0$ .<sup>1</sup> Abbiamo perciò

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < \sqrt{\frac{1-x^2}{3}}\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -\sqrt{\frac{1-x^2}{3}} < y < 0\}$$

$$U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0, 0 < y < \sqrt{\frac{1-x^2}{3}}\}$$

$$U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0, -\sqrt{\frac{1-x^2}{3}} < y < 0\}$$

ESERCIZIO 3.  $\begin{cases} \dot{x} = e^{xy}(2y-2) \\ \dot{y} = e^{xy}(4x^3-4x) \end{cases} :$

1. Mostriamo che la funzione  $H(x, y) = (y-x^2)(y+x^2-2)$  è una costante del moto per il sistema:  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = (-2x(y+x^2-2) + 2x(y-x^2))e^{xy}(2y-2) + ((y-x^2) + (y+x^2-2))e^{xy}(4x^3-4x) = (-4x^3+4x)e^{xy}(2y-2) + (2y-2)e^{xy}(4x^3-4x) = 0$ . (Si noti che il sistema non è della forma  $\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$ : questa è una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di una costante del moto).

2. Per determinare i punti di equilibrio risolviamo il sistema  $\begin{cases} e^{xy}(2y-2) = 0 \\ e^{xy}(4x^3-4x) = 0 \end{cases}$ : dalla prima equazione ricaviamo che  $y = 1$  e dalla seconda  $x = 0$  oppure  $x = \pm 1$ , dunque il sistema ammette tre punti di equilibrio:  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ .

3. Per discutere la stabilità di questi punti, proviamo a ricavare informazioni dal sistema linearizzato:  $A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}e^{xy}(2y-2) & \frac{\partial}{\partial y}e^{xy}(2y-2) \\ \frac{\partial}{\partial x}e^{xy}(4x^3-4x) & \frac{\partial}{\partial y}e^{xy}(4x^3-4x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy}(2y-2) & xe^{xy}(2y-2) + 2e^{xy} \\ ye^{xy}(4x^3-4x) + (12x^2-4)e^{xy} & xe^{xy}(4x^3-4x) \end{pmatrix} \Rightarrow A(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, A(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2e \\ 8e & 0 \end{pmatrix}, A(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{e} \\ \frac{8}{e} & 0 \end{pmatrix}$ , quindi i punti  $(\pm 1, 1)$  sono stabili, perché gli autovalori delle matrici in quei punti sono rispettivamente  $\pm 4e$  e  $\pm \frac{4}{e}$ , mentre sull'altro punto non possiamo dire nulla, perché gli autovalori sono  $\lambda = \pm 2\sqrt{2}i$ ; tuttavia, notiamo che il punto  $(0, 1)$  è un minimo della funzione  $H$ , perché  $\nabla H(x, y) = (4x - 4x^3, 2y - 2)$  si annulla in quel punto e la matrice Hessiana  $\begin{pmatrix} 4 - 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  vale  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , che è definita positiva; dunque, possiamo applicare il teorema di Ljapunov prendendo  $W(x, y) = H(x, y) - H(0, 1)$  per concludere che il p.d.e. è stabile.

4. Il moto avviene lungo le curve di livello della funzione  $H$ : studiamo innanzi tutto quelle che contengono i p.d.e. instabili: poiché  $H(\pm 1, 1) = 0$ , giacciono entrambi sulla curva  $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y-x^2)(y+x^2-2) = 0\}$ , che è costituita dall'unione delle parabole  $\{y = x^2\}$  e  $\{y = 2 - x^2\}$

<sup>1</sup>cfr. Teorema 20.36 sulle dispense del corso

e consta dunque di 6 traiettorie che tendono asintoticamente a uno dei due punti in almeno una direzione; le altre curve di livello possono essere tracciate per continuità rispetto ai dati iniziali.

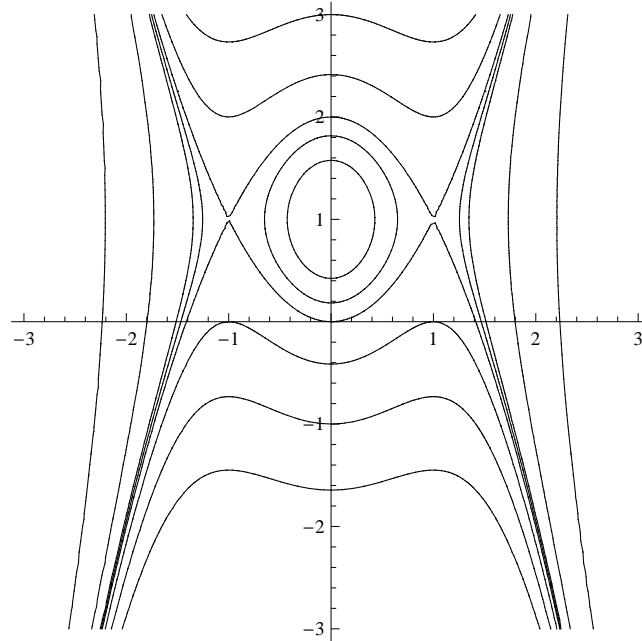


Figura 4: Curve di livello della funzione  $H(x, y) = (y - x^2)(y + x^2 - 2)$

Determiniamo ora i versi di percorrenza: se ci troviamo sulla componente di  $\Gamma_0$  costituita dalla parabola  $y = x^2$ , la prima equazione del sistema diventa  $\dot{x} = e^{x^3}(2x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow |x| > 1$ , di conseguenza la variabile  $x(t)$  cresce fintanto che è minore di  $-1$ , decresce fintanto che è compresa tra  $-1$  e  $1$  (tendendo asintoticamente al punto  $(-1, 1)$  in entrambi i casi) e cresce quando è maggiore di  $1$ ; gli altri versi si possono determinare per continuità.

ESERCIZIO 4. Per determinare i punti di equilibrio dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x - 2y^2 = 0 \\ -2y - 2x^2 = 0 \end{cases}$$

trovando quindi i due punti  $P_0 = (0, 0)$  e  $P_1 = (-\frac{1}{2}^{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{2}^{\frac{2}{3}})$ . Cominciamo con lo studio del sistema linearizzato, che è dato dalla matrice

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4y \\ -4x & -2 \end{pmatrix}$$

e vediamo cosa succede intorno ai punti di equilibrio.

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale con autovalori reali strettamente negativi e quindi  $P_0$  è un punto asintoticamente stabile.

$$A(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}) = \begin{pmatrix} -1 & 4\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \\ 4\sqrt[3]{\frac{1}{2}} & -2 \end{pmatrix}$$

Il cui polinomio caratteristico è  $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 6$  e quindi le sue radici sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$$

e quindi esiste una radice reale strettamente positiva; perciò  $P_1$  è un punto instabile. Per trovare il bacino di attrazione definiamo la funzione

$$W(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

e osserviamo che  $W$  è una funzione di Ljapunov per  $P_0$ ; infatti  $W(0, 0) = 0$  e  $W(x, y) > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$ . Inoltre

$$\dot{W}(x, y) = -x^2 - 2y^2x - 2y^2 - 2x^2y = -x^2(2y + 1) - y^2(2x + 2)$$

e quindi  $\dot{W}(0, 0) = 0$  mentre  $\dot{W} < 0$  se  $x > -1$  e  $y > \frac{-1}{2}$ . Abbiamo che  $\dot{W} < 0$  su  $B_{\frac{1}{2}}(0) \setminus \{0\}$  e perciò per il teorema di Ljapunov  $B_{\frac{1}{2}}(0)$  è contenuto nel bacino di attrazione di  $P_0$

ESERCIZIO 1. Il sistema è

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x(x+2)(x+1) \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

(1.1) **Punti di equilibrio** Poniamo  $\nabla V = 0$  e otteniamo tre punti di equilibrio

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (-2, 0), \quad P_2 = (-1, 0).$$

La matrice del sistema linearizzato è:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} -4(3x^2 + 6x + 2) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

In particolare abbiamo

$$A(0, 0) = A(-2, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi  $P_0$  e  $P_1$  sono punti asintoticamente stabili per il sistema visto che i due autovalori sono entrambi strettamente negativi. Invece

$$A(-1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

quindi abbiamo un autovalore positivo, perciò  $P_2$  è instabile.

(1.2) **Curve di livello.** Studiamo le curve di livello di  $V(x, y)$  a partire dall'altezza del punto  $P_2$ . Si vede che  $V(-1, 0) = 1$ , quindi  $y^2 + x^2(x+2)^2 = 1$ . Studiamo  $y = \sqrt{1 - x^2(x+2)^2}$ .  $y = -\sqrt{1 - x^2(x+2)^2}$  sarà simmetrica. Posto  $F(x) = x^2(x+2)^2$  vediamo che  $F'(x) = 4x(x+2)(x+1)$  e quindi  $F(x)$  ha un massimo in  $(-1, 0)$  e due minimi in  $(0, 0)$  e  $(-2, 0)$ . Il suo grafico sarà quindi

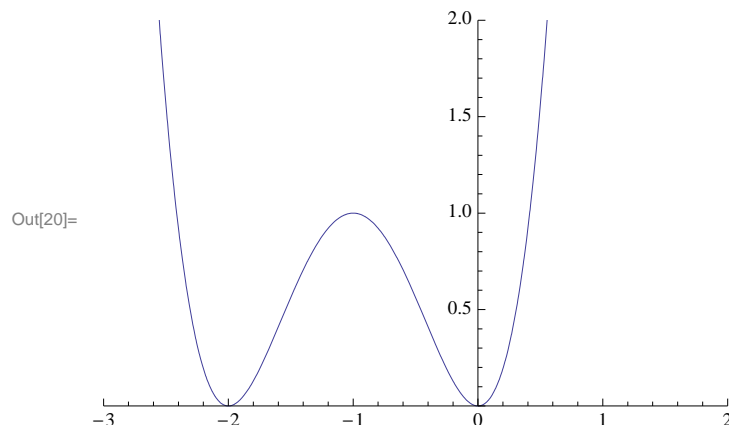


Figura 1: Grafico  $F(x)$ .

La funzione  $y = \sqrt{1 - x^2(x + 2)^2}$  è definita per gli  $x$  tali che  $F(x) \leq 1$  e visto che

$$y' = \frac{-F'(x)}{2\sqrt{1 - F(x)}}$$

nei punti di minimo di  $F$ ,  $y$  ha dei massimi, e nei punti in cui  $F(x) = 1$   $y$  incontra l'asse  $x$  con tangente verticale. Inoltre vicino a  $-1$

$$y(x) = 0 + \frac{dy}{dx}(-1)(x + 1) + \dots$$

attraversa l'asse con tangente obliqua. Quindi ricordando che  $y = \pm\sqrt{1 - F(x)}$  la curva  $V(x, y) = 1$  è:

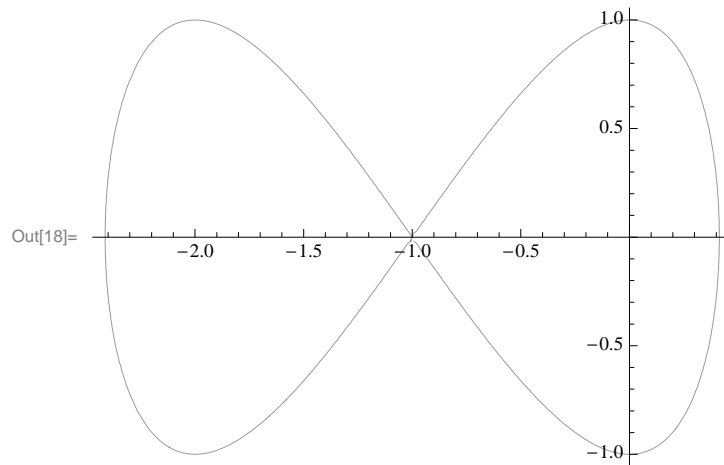


Figura 2: Curva  $V(x, y) = 1$

Per continuità otteniamo le altre curve di livello

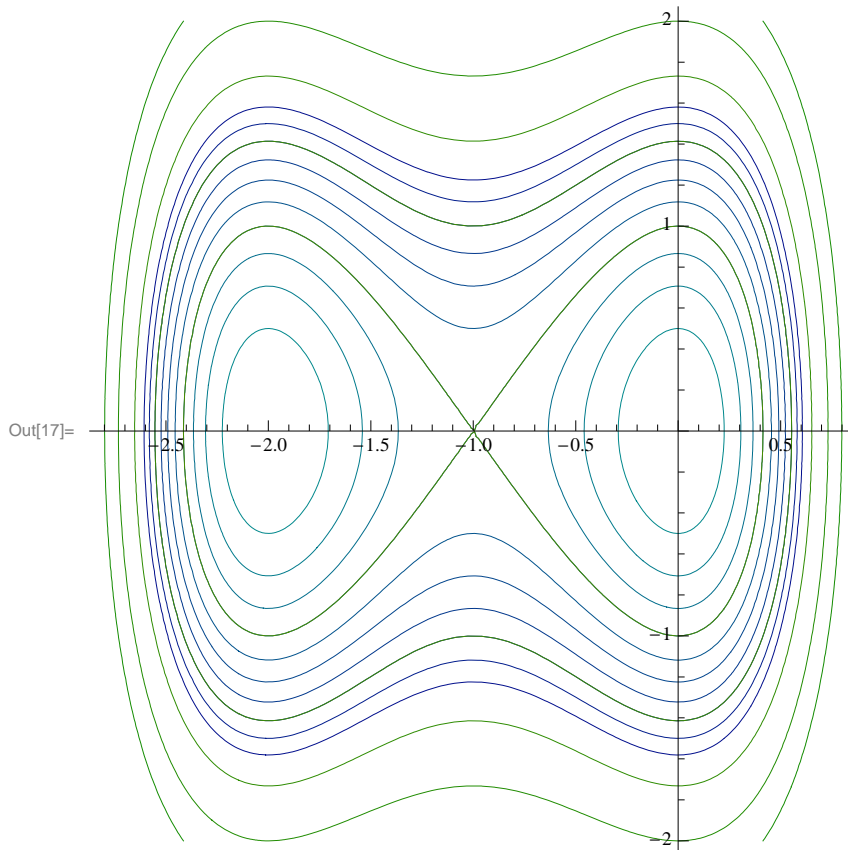


Figura 3: Curve di livello di  $V$ .

Sappiamo che nei punti regolari del sistema le traiettorie sono ortogonali alle curve di livello di  $V$ . Per i versi di percorrenza basta notare che lungo l'asse  $y = 0$  per  $x > 0$  e  $-2 < x < -1$ ,  $\dot{x} < 0$ , mentre per  $x < -2$  o  $-1 < x < 0$  abbiamo che  $\dot{x} > 0$ . Gli altri versi di percorrenza si ottengono per dipendenza differenziabile dai dati iniziali.

(1.3) **Bacini di attrazione.** Stimiamo il bacino d'attrazione di  $(0, 0)$ . Consideriamo la funzione  $W(x, y) = V(x, y)$ . Si verifica facilmente che è una funzione di Ljapunov. Inoltre ogni compatto  $K$  contenuto nel semipiano  $\{x > -1\}$  e con  $(0, 0) \in K$ , è positivamente invariante e  $K \setminus \{(0, 0)\}$  non contiene traiettorie costituite unicamente da punti in cui  $\dot{W} = 0$ . Allora per il teorema di Barbašin-Krasovskij il bacino d'attrazione di  $(0, 0)$  è tutto il semipiano  $\{x > -1\}$ .

Si ragiona allo stesso modo per il punto  $(-2, 0)$  concludendo che il suo bacino d'attrazione è il semipiano  $\{x < -1\}$ .

ESERCIZIO 2. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = x^4 - 5x^2y^4 - 6x^2y^2 - x^2 = x^2(x^2 - 5y^4 - 6y^2 - 1) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2xy^5 + 4xy^3 + 2xy - 4x^3y = 2xy(y^4 + 2y^2 + 1 - 2x^2) \end{cases} .$$

1. Per determinare i punti di equilibrio del sistema risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2(x^2 - 5y^4 - 6y^2 - 1) = 0 \\ 2xy(y^4 + 2y^2 + 1 - 2x^2) = 0 \end{cases} : \text{dalla prima equazione ricaviamo che } x = 0 \text{ oppure } x^2 - 5y^4 - 6y^2 - 1 = 0: \text{ se } x = 0, \text{ la seconda equazione è sempre vera, dunque tutti i punti del tipo } (0, y) \text{ sono p.d.e.; inoltre, la seconda equazione si annulla per } y = 0, \text{ che substituito nel secondo fattore della prima equazione da } x^2 - 1 = 0, \text{ dunque } (\pm 1, 0) \text{ sono altri due punti di equilibrio; questi sono gli unici p.d.e. perché il sistema } \begin{cases} x^2 - 5y^4 - 6y^2 - 1 = 0 \\ y^4 + 2y^2 + 1 - 2x^2 = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni, in quanto altrimenti si avrebbe  $x^2 - 5y^4 - 6y^2 - 1 = 0 = y^4 + 2y^2 + 1 - 2x^2 \Rightarrow 10y^4 + 12y^2 + 2 = 2x^2 = y^4 + 2y^2 + 1 \Rightarrow 8y^4 + 10y^2 + 1 = 0$ , che è assurdo.

2. Per discutere la stabilità dei punti di equilibrio trovati, proviamo innanzi tutto a ricavare informazioni dal sistema linearizzato:  $A(x, y) =$   

$$= \begin{pmatrix} -4x^3 - 10xy^4 - 12xy^2 - 2x & -20x^2y^3 - 12x^2y \\ 2y^5 + 4y^3 + 2t - 12x^2y & 10xy^4 + 12xy^2 + 2x - 4x^3 \end{pmatrix}$$
, dunque  $A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \mp 2 \end{pmatrix}$   
e quindi i due punti sono instabili, mentre  $A(0, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2y^5 + 4y^3 + 2y & 0 \end{pmatrix}$ , avendo entrambi gli autovalori nulli, non da alcuna informazione; non si può neanche applicare il teorema di Ljapunov perché, essendoci una retta di punti di equilibrio, nessuno di essi potrà essere un massimo o un minimo isolato per  $H$ . Torneremo ad analizzare in seguito in seguito dopo aver studiato le curve di livello del sistema.
3. Le traiettorie del sistema si svolgono sulle curve di livello della funzione  $H(x, y) = x^2y(x + y^2 + 1)(x - y^2 - 1)$ ; iniziamo a studiare le curve contenenti i punti di equilibrio: i p.d.e. si trovano tutti sulla curva  $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$ , che è formata dagli assi cartesiani  $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ ,  $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$  e dalle due parabole con asse orizzontale  $C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 + 1\}$ ,  $C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y^2 - 1\}$ . Le altre curve di livello possono essere disegnate per continuità rispetto ai dati iniziali, come in figura. Troviamo ora i versi di percorrenza: consideriamo innanzi tut-

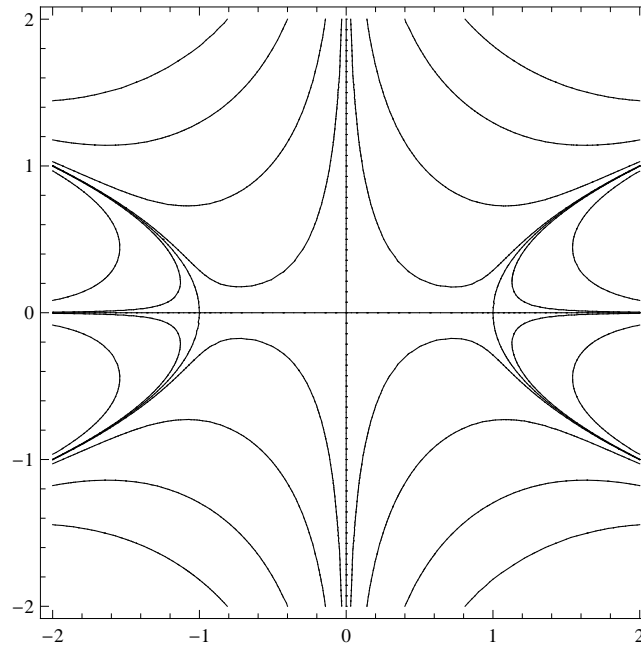


Figura 4: Curve di livello della funzione  $H(x, y) = x^2y(x + y^2 + 1)(x - y^2 - 1)$

to la curva di livello costituita dall'asse delle ascisse  $y = 0$ : lungo questa curva si ha  $\dot{x} = x^2(x^2 - y^4 - 2y^2 - 1) = x^2(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow |x| > 1$ , dunque lungo quest'asse il moto è diretto verso destra sulla semiretta  $x < -1$ , tendendo asintoticamente al punto di equilibrio  $(0, -1)$  per  $t \rightarrow +\infty$ , verso sinistra sul segmento  $\{-1 < x < 1\}$ , ove tende a  $x = \pm 1$  per  $t \rightarrow \mp\infty$ , e nuovamente verso destra per  $x > 1$ , tendendo a  $x = 1$  per  $t \rightarrow -\infty$ . Notiamo inoltre che le traiettorie del primo quadrante che stanno sopra la parabola  $x = y^2 + 1$  sono tali che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$ ; ciò è vero per dati iniziali arbitrariamente vicini all'asse verticale, quindi tutti i punti d'equilibrio del tipo  $(0, y)$ , con  $y \geq 0$ , sono instabili; facendo un ragionamento analogo per le traiettorie che si trovano nel quarto quadrante sotto la



stessa parabola possiamo concludere che anche gli altri punti di equilibrio del tipo  $(0, y)$  con  $y < 0$  sono instabili.

4. Per dimostrare che non esistono traiettorie periodiche, facciamo vedere che nessuna traiettoria si chiude; per far vedere questo, mostriamo che almeno una tra  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  ha sempre lo stesso segno: se ci troviamo nella regione di piano  $\{|x| < y^2 + 1\}$ , cioè tra le due parabole che compongono la curva  $\Gamma_0$ , allora  $x^2 < y^4 + 2y^2 + 1 \leq 5y^4 + 6y^2 + 1$ , dunque  $\dot{x} = x^2(x^2 - 5y^4 - 6y^2 - 1) < 0$ ; se invece  $|x| > y^2 + 1$ , allora  $y^4 + 2y^2 + 1 - 2x^2 \geq y^4 + 2y^2 + 1 - x^2 < 0$ , dunque  $\dot{y} = 2xy(y^4 + 2y^2 + 1 - 2x^2)$  ha sempre lo stesso segno, perché la quantità  $xy$  ha sempre lo stesso segno, in quanto gli assi sono traiettorie.

ESERCIZIO 3. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = x - x^2y - y^3 \end{cases}.$$

1. Il sistema linearizzato è  $A(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & -x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$ , dunque calcolato nell'origine è  $A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , che ha come autovalori  $\lambda = \pm i$  e dunque non da informazioni. È quindi necessario applicare uno dei teoremi di stabilità: consideriamo la funzione  $W(x, y) = x^2 + y^2$ : chiaramente si ha  $W(0, 0) = 0$  e  $W(x, y) > 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$ ; inoltre,  $\frac{dW}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2xy - 2x^4 - 2x^2y^2 + 2xy - 2x^2y^2 - 2y^4 = -2x^4 - 4x^2y^2 - 2y^4 = -2(x^2 + y^2)^2$ ; dunque,  $\dot{W}(x, y) < 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$ , dunque per il teorema di Ljapunov l'origine è asintoticamente stabile.

2. Sia  $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  il disco centrato nell'origine di raggio  $R$ :  $\forall R > 0$ , si ha che  $B_R$  è un compatto, chiusura dell'aperto  $A_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ , contiene l'origine, è positivamente invariante perché la funzione  $W(x, y) = x^2 + y^2$  decresce lungo le traiettorie e dunque se  $x^2(0) + y^2(0) \leq R^2$ , allora  $x^2(t) + y^2(t) \leq x^2(0) + y^2(0) \leq R^2$ , e l'unico suo punto in cui  $W$  è costante è l'origine, dunque sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Barbašin-Krasovskij, pertanto  $B_R$  appartiene al bacino d'attrazione dell'origine; ma essendo  $R$  arbitrario, allora il bacino d'attrazione contiene tutti i dischi centrati nell'origine e quindi non può che essere tutto il piano.

3. Posto  $W(t) = x^2(t) + y^2(t) = \rho^2(t)$ , per quanto visto in precedenza si ha  $\dot{W}(t) = -2W^2(t)$ , dunque  $\frac{\dot{W}(t)}{W^2(t)} = -2 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{W}(s)}{W^2(s)} = \int_0^t -2ds =$   
 $= -2t \xrightarrow{W(t)=W} \int_{W(0)}^{W(t)} \frac{dW}{W^2} = -2t \Rightarrow \frac{1}{W(0)} - \frac{1}{W(t)} = -2t \Rightarrow \frac{1}{W(t)} =$   
 $= \frac{1}{W(0)} + 2t = \frac{1 + 2W(0)t}{W(0)} \Rightarrow W(t) = \frac{W(0)}{1 + 2W(0)t} \Rightarrow \rho(t) = \sqrt{W(t)} =$   
 $\sqrt{\frac{W(0)}{1 + 2W(0)t}} = \frac{\rho(0)}{\sqrt{1 + 2\rho^2(0)t}}.$

4. Come da suggerimento, usiamo le coordinate polari  $(\rho, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ ;  $\rho(t)$  è stato appena determinato, quindi è sufficiente calcolare  $\theta(t)$ : essendo  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$ , allora si avrà  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2 - x^3y - xy^3 - x^2 + x^3y + xy^3}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{x^2 + y^2} =$

$$\begin{aligned}
&= -1 \Rightarrow \theta(t) = \theta(0) - t, \text{ dunque nelle coordinate } (x, y) \text{ la soluzione esplicita è} \\
&(x(t), y(t)) = (\rho(t) \cos(\theta(t)), \rho(t) \sin(\theta(t))) = \\
&= \left( \frac{\rho(0) \cos(\theta(0) - t)}{\sqrt{1 + 2\rho^2(0)t}}, \frac{\rho(0) \sin(\theta(0) - t)}{\sqrt{1 + 2\rho^2(0)t}} \right) = \left( \frac{\rho(0)(\cos(\theta(0)) \cos t + \sin(\theta(0)) \sin t)}{\sqrt{1 + 2\rho^2(0)t}}, \right. \\
&\left. \frac{\rho(0)(\sin(\theta(0)) \cos t - \cos(\theta(0)) \sin t)}{\sqrt{1 + 2\rho^2(0)t}} \right) = \left( \frac{x(0) \cos t + y(0) \sin t}{\sqrt{1 + 2x^2(0)t + 2y^2(0)t}}, \right. \\
&\left. \frac{y(0) \cos t - x(0) \sin t}{\sqrt{1 + 2x^2(0)t + 2y^2(0)t}} \right).
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4. Innanzitutto vediamo che il sistema è

$$\begin{cases} \dot{x} = -2xe^{-(x^2+y^2)} \\ \dot{y} = -2ye^{-(x^2+y^2)} \end{cases}$$

(1.1) **Punti di equilibrio.** Risolviamo il sistema  $\nabla V = 0$

$$\begin{cases} -2xe^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ -2ye^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$$

e troviamo che  $P_0 = (0, 0)$  è l'unico punto di equilibrio.

**Stabilità.** La matrice del sistema linearizzato è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-(x^2+y^2)}(4x^2 - 2) & 4xye^{-(x^2+y^2)} \\ 4xye^{-(x^2+y^2)} & e^{-(x^2+y^2)}(4y^2 - 2) \end{pmatrix}$$

In particolare avremo

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi, poichè gli autovalori sono entrambi strettamente negativi,  $P_0$  è asintoticamente stabile.

(4.2) **Curve di livello.** Notiamo che  $V(x, y) < 1, \forall (x, y) \neq (0, 0)$ . Quindi consideriamo le curve di livello  $V(x, y) = c$ , con  $c < 1$ . Abbiamo quindi  $1 - e^{-(x^2+y^2)} = c$ , cioè  $e^{-(x^2+y^2)} = 1 - c$ . La curva di livello sarà perciò  $x^2 + y^2 = -\log(1 - c)$ , una circonferenza. Per continuità otteniamo le altre curve di livello.

Sappiamo inoltre che nei punti regolari del sistema si ha che  $\nabla V$  è ortogonale alle curve di livello di  $V$ .

Poichè le velocità sono uguali a  $-\nabla V$  in ogni punto, le traiettorie sono ortogonali alle curve di livello e sono dirette in senso opposto al gradiente.

(4.3) **Bacino d'attrazione.** Poniamo  $W(x, y) = V(x, y)$ . Si verifica facilmente che  $W$  è una funzione di Ljapunov per  $P_0$ . Dal teorema di Barbašin-Krasovskij sappiamo che un qualunque compatto  $K$  chiusura di un aperto tale che  $P_0 \in K$ , positivamente invariante e non esistono traiettorie in  $K \setminus P_0$  costituite unicamente dai punti  $z$  in cui  $\dot{W}(z) = 0$ , è contenuto nel bacino d'attrazione di  $P_0$ . Ma allora con  $W$  come funzione di Ljapunov il bacino d'attrazione è tutto il piano.

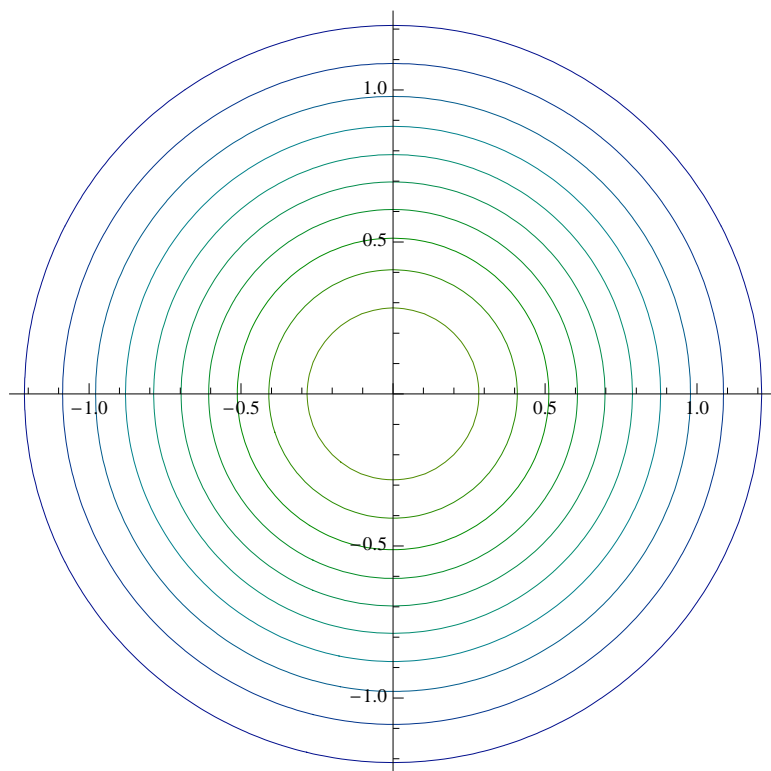


Figura 5: Curve di livello di  $V(x, y)$ .

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO 6 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. Studiamo il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = (-1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

dunque lo spettro di  $A$  sarà  $\Sigma(A) = \{-1, 1, 2\}$ , calcoliamo gli autospazi associati a ciascun autovalore.

Per  $\lambda = -1$  risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 6x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

e troviamo

$$\text{Ker}(A + \mathbb{1}) = \left\{ \left(-\frac{s}{2}, 0, s\right) \in \mathbb{R}^3, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Per  $\lambda = 1$  risolviamo

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 6x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

quindi

$$\text{Ker}(A - \mathbb{1}) = \left\{ \left(-\frac{s}{2}, \frac{s}{2}, s\right) \in \mathbb{R}^3, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Per  $\lambda = 2$  abbiamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases}$$

perciò

$$\text{Ker}(A - 2\mathbb{1}) = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^3, s \in \mathbb{R}\}$$

Una base di autovettori è data da  $v = (-1, 0, 2)$ ,  $u = (-1, 1, 2)$ ,  $w = (0, 0, 1)$ .

Quindi

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo perciò

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \exp Dt = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\exp At = P(\exp Dt)P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ -2e^{-t} + 2e^{2t} & -2e^{-t} + 2e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

La soluzione è

$$x(t) = (\exp At)x(0) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} + e^t \\ e^t \\ -6e^{-t} + 4e^{2t} + 2e^t \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2. Dato il problema di Cauchy in  $\mathbb{R}$   $\begin{cases} \dot{x} = -x|x| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ , si risponda alle seguenti domande:

1. La funzione  $f(x) = -x|x|$  è di classe  $C^1$ , perché  $f'(x) = -2|x|$ , dunque per il teorema di esistenza e unicità il problema di Cauchy ha un'unica soluzione.
2. Se  $x_0 = 0$ , la soluzione è  $x(t) \equiv 0 \forall t$ ; se  $x_0 > 0$ , essendo la soluzione unica, dovrà essere  $x(t) > 0 \forall t$ , dunque il problema di Cauchy diventa  $\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ , che si risolve per separazione di variabili:  $\frac{\dot{x}}{x^2} = -1 \Rightarrow \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = -t \Rightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = -t \Rightarrow \frac{1}{x(t)} = \frac{1+x_0t}{x_0} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1+x_0t}$ ; se invece  $x_0 < 0$ , per lo stesso motivo si ha  $x(t) < 0 \forall t$ , dunque l'equazione diventa  $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ , che si risolve similmente al caso precedente:  $\frac{\dot{x}}{x^2} = 1 \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = t \Rightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t \Rightarrow \frac{1}{x(t)} = \frac{1-x_0t}{x_0} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1-x_0t}$ . Dunque, possiamo riscrivere la soluzione come  $x(t) = \frac{x_0}{1+|x_0|t}$ , che ha per intervallo massimale di esistenza è  $\left(-\frac{1}{|x_0|}, +\infty\right)$  ed è di classe  $C^\infty$  su tutto il suo insieme di definizione.
3. Abbiamo verificato al punto precedente che  $x_0 = 0$  è un p.d.e.; notiamo inoltre che  $x(t) = \frac{x_0}{1+|x_0|t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , per qualunque  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dunque l'origine è asintoticamente stabile e il suo bacino d'attrazione è tutto  $\mathbb{R}$ .

### ESERCIZIO 3.

(3.1) Basta calcolare  $\dot{H}$  e notare che è sempre nulla:

$$\dot{H}(x, y) = \dot{x}(y^2 - ye^{-x^2} + 2x^2ye^{-x^2}) + \dot{y}(2xy - xe^{-x^2}) = 0$$

(3.2) Cerchiamo i punti di equilibrio risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x(2y - e^{-x^2}) = 0 \\ ye^{-x^2} - 2x^2ye^{-x^2} - y^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima consideriamo  $x = 0$  e nella seconda otteniamo  $y(1 - y) = 0$ . Abbiamo perciò i punti di equilibrio  $P_0 = (0, 0)$  e  $P_1 = (0, 1)$ . Ponendo  $y = \frac{e^{-x^2}}{2}$  si ottiene  $x = \pm \frac{1}{2}$  e perciò si hanno i punti  $P_{2,3} = (\pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}})$

Studiamo la stabilità considerando la matrice del sistema linearizzato intorno ai punti di equilibrio

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2} & 2x \\ -2xye^{-x^2} - 4xye^{-x^2} + 4x^3ye^{-x^2} & e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - 2y \end{pmatrix}$$

Quindi vediamo che

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$P_0$  e  $P_1$  sono punti instabili. Invece

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} & 1 \\ -\frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}, \quad A(P_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} & -1 \\ \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

non danno informazioni. Quindi vediamo se  $W(x, y) = H(x, y) - H(P_2)$  è una funzione di Ljapunov. Studiamone la matrice Hessiana.

$$\mathcal{H}(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} & 1 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, perciò  $P_2$  è un minimo per  $H$  quindi  $W$ , per come è stata definita, è una funzione di Ljapunov. Si ragiona in modo simile per  $P_3$  e si conclude che  $P_{2,3}$  sono punti di equilibrio stabili.

(3.3) Studiamo ora le curve di livello partendo dalla curva passante per i punti instabili

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

dove

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{-x^2}\}$$

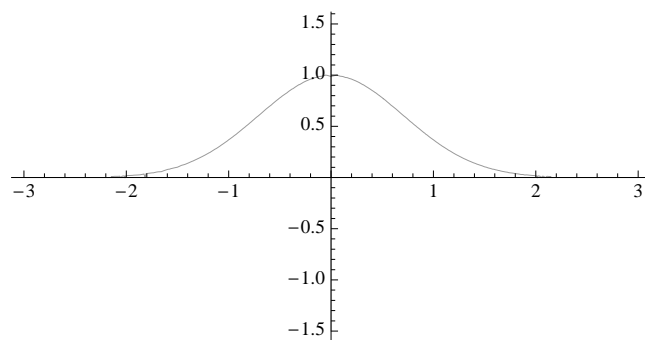


Figura 1: Grafico della curva di livello  $\Gamma_0$

Per dipendenza continua dal dato iniziale troviamo quindi le altre curve di livello

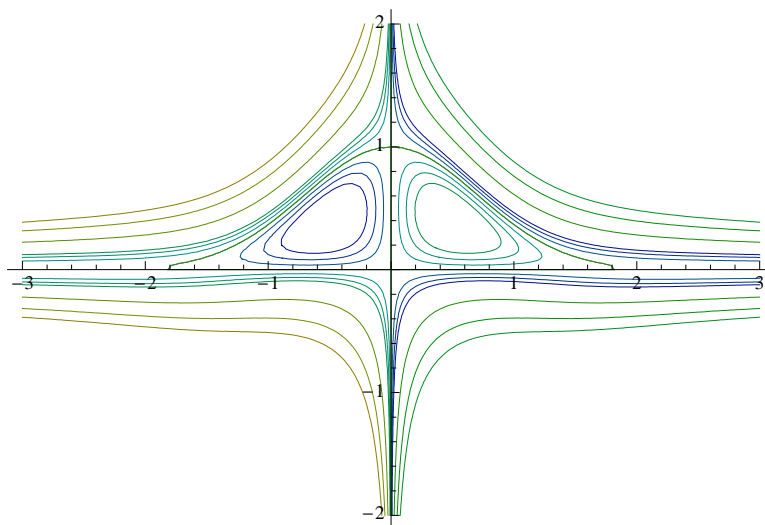


Figura 2: piano delle fasi per il sistema

Studiamo i versi di percorrenza sulla curva  $\Gamma_0$ . Sull'asse  $y = 0$  abbiamo che  $\dot{x} < 0$  per  $x > 0$  e  $\dot{x} > 0$  per  $x < 0$ . Sull'asse  $x = 0$  abbiamo  $\dot{y} > 0$  per  $0 < y < 1$  e  $\dot{y} < 0$  altrimenti. Gli altri versi si ottengono per dipendenza differenziabile dai dati iniziali.

(3.4) Non abbiamo alcun risultato teorico che ci assicuri l'esistenza di traiettorie periodiche nelle regioni

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < e^{-x^2}\} \setminus \{P_2\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, 0 < y < e^{-x^2}\} \setminus \{P_3\}$$

non essendo delimitate da curve di livello chiuse. Tuttavia anche in  $U_1$  e  $U_2$  ogni dato iniziale genera una traiettoria periodica. Dimostriamolo per  $U_1$ . Sicuramente avremo orbite periodiche  $\varepsilon$ -vicine al punto di equilibrio stabile  $P_2$  trattandosi di un minimo isolato per la costante del moto  $H$ . Supponiamo per assurdo che esista una traiettoria con dato iniziale in  $U_1$  non periodica. Tale traiettoria  $\gamma(x, t)$  non può tendere a un ciclo limite ( $H$  non è identicamente costante su alcun aperto) né al punto stabile perchè intersecherebbe le traiettorie periodiche intorno a  $P_2$ . Quindi l'unica possibilità è che abbia l'asse  $x$  come asintoto, perciò lungo questa traiettoria

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y) = H(\infty, 0)$$

ma, poichè  $H$  è una costante del moto,  $H(\infty, 0) = 0$  dato che l'asse  $x$  è una separatrice. Ne segue che  $H(x, y) = 0$  lungo la traiettoria  $\gamma$ . Poichè  $H$  non è costante su alcun aperto esisterà una traiettoria tra  $\gamma$  e la separatrice  $\{y = e^{-x^2}\}$  lungo la quale  $H \neq 0$ . Ma per continuità dai dati iniziali dovrà comunque avere come asintoto l'asse  $x$  e quindi per la ragione di prima  $H(x, y) = 0$  anche lungo questa traiettoria, il che è assurdo. Pertanto  $\gamma(x, t)$  è periodica.

ESERCIZIO 4. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = 6x^5 - 24x^3 + 18x \\ \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2y \end{cases}$$

1. Risolviamo il sistema  $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = 6x^5 - 24x^3 + 18x \\ \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2y \end{cases}$  : dalla seconda equazione otteniamo chiaramente  $y = 0$ , mentre il primo polinomio si fattorizza come  $6x(x^2 - 1)(x^2 - 3)$ , che ha per radici  $0, \pm 1$  e  $\pm\sqrt{3}$ , quindi abbiamo cinque punti di equilibrio:  $(0, 0), (1, 0), (-1, 0), (\sqrt{3}, 0)$  e  $(-\sqrt{3}, 0)$ .

2. La matrice del sistema linearizzato è  $A(x, y) = \begin{pmatrix} 30x^4 - 72x^2 + 18 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ , dunque

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A(\pm\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} 72 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

i punti  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  sono instabili, mentre gli altri due sono asintoticamente stabili.

3. Le traiettorie del sistema sono ortogonali alle curve di livello  $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = c\}$ ; queste ultime possono essere disegnate a partire dalla  $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^6 + 6x^4 - 9x^2 = 0\}$ , che contiene i tre punti di equilibrio instabili: la curva è costituita dall'unione dei grafici delle due cubiche  $\{y = x^3 - 3x\}$  e  $\{y = 3x - x^3\}$ ; le altre curve possono essere tracciate per continuità, come in figura. Infine, i versi di percorrenza si trovano facilmente notando che  $\dot{y}$  ha sempre il segno opposto rispetto a  $y$ , dunque  $y(t)$  decresce nel semipiano superiore e cresce in quello inferiore.

4. Come si può intuire dal disegno delle traiettorie, il bacino di attrazione del punto  $(1, 0)$  sarà la striscia  $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \sqrt{3}\}$ ; dimostriamolo usando il teorema di Barbašin-Krasovskij. Come al solito, prendiamo come funzione di Ljapunov  $W(x, y) := V(x, y) -$

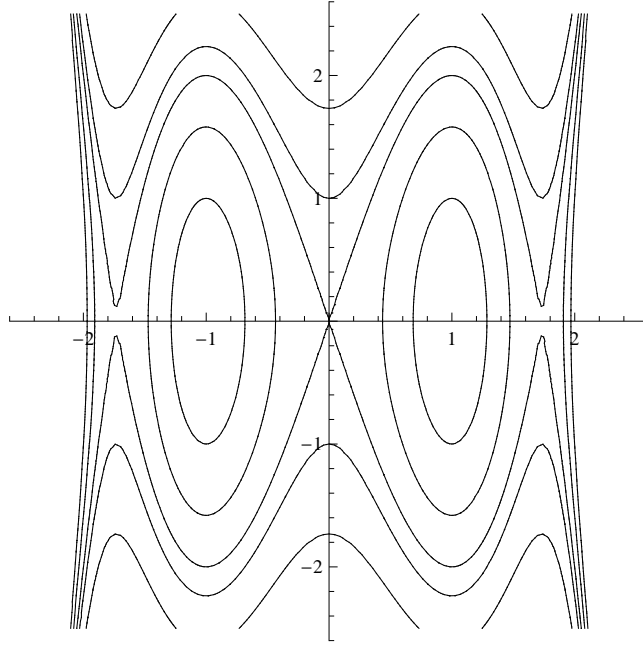


Figura 3: Curve di livello della funzione  $V(x, y) = y^2 - x^6 + 6x^4 - 9x^2$

$-V(1, 0) = y^2 - x^6 + 6x^4 - 9x^2 - 1$ : tale funzione vale ovviamente 0 nel punto di equilibrio ed è strettamente positiva nel suo intorno, perché l'Hessiana di  $V$  in  $(1, 0)$ , essendo la matrice del sistema linearizzato cambiata di segno, è strettamente definita positiva; inoltre chiaramente si ha  $\frac{d}{dt}W(x, y) = \langle \nabla V(x, y), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = -\langle \nabla V(x, y), \nabla V(x, y) \rangle \leq 0$ . Consideriamo poi come insieme  $P$  un qualsiasi rettangolo contenente il punto  $(1, 0)$  e contenuto in  $B$ , del tipo  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , con  $0 < a < 1$ ,  $1 < b < \sqrt{3}$  e  $c < 0 < d$ ;  $P$  è positivamente invariante, perché il campo vettoriale è diretto verso il punto d'equilibrio, e non contiene traiettorie in cui  $\dot{W}(x, y) = 0$ , perché non ha p.d.e. all'interno, dunque rispetta tutte le ipotesi del teorema e pertanto è contenuto nel bacino d'attrazione; essendo  $a, b, c$  e  $d$  costanti arbitrarie, ogni rettangolo di questo tipo fa parte del bacino e di conseguenza questo dev'essere proprio  $P$ . Ragionando analogamente, si dimostra che il bacino d'attrazione di  $(-1, 0)$  è  $B' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{3} < x < 0\}$ .



ESERCIZIO 1.

**1.1 Sistema dinamico associato.** Posto  $y = \dot{x}$  otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV}{dx}(x) = -\frac{2x^3 - 6x^2 + 4}{(x-2)^2} = -\frac{(x-1)(2x^2 - 4x - 4)}{(x-2)^2} \end{cases}$$

**1.2 Punti d'equilibrio e stabilità.** Sappiamo che si ha equilibrio nei punti  $(x_0, 0)$ , con  $x_0$  punto critico del potenziale, e si vede che  $V'(x) = 0$  per  $x = 0$  e  $x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$ , quindi i punti di equilibrio sono

$$P_0 = (1, 0), \quad P_1 = \left( \frac{2 + \sqrt{12}}{2}, 0 \right), \quad P_2 = \left( \frac{2 - \sqrt{12}}{2}, 0 \right)$$

Inoltre dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti  $(x_0, 0)$  con  $x_0$  punto di minimo del potenziale  $V(x)$ . Ora,  $V'(x) > 0$  per  $\frac{2-\sqrt{12}}{2} < x < 1$  o  $x > \frac{2+\sqrt{12}}{2}$  quindi  $x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$  sono di minimo mentre  $x = 1$  è un massimo. Avremo perciò che  $P_{1,2}$  sono stabili e  $P_0$  è instabile.

**1.3 Grafico dell'energia potenziale** Notiamo che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$  e che  $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} V(x) = \pm\infty$ .  $V(x) = 0$  per  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{2}$ . Lo studio della derivata è stato fatto nel punto precedente perciò

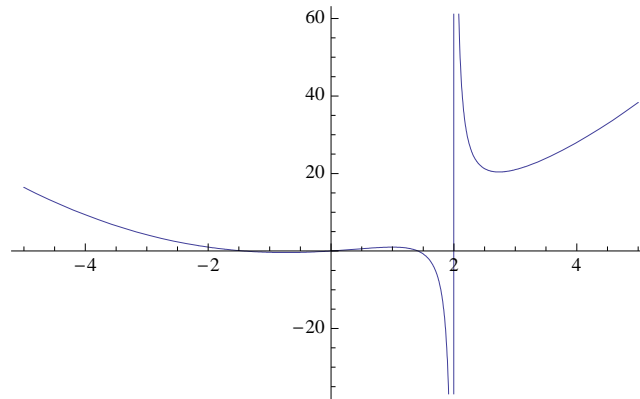


Figura 1: Grafico di  $V(x)$

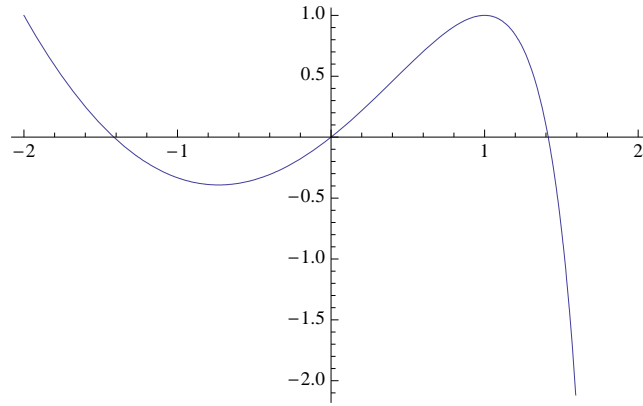


Figura 2: Grafico di  $V(x)$  per  $-2 < x < 2$

**1.4 Piano delle fasi.** Da  $E = \frac{y^2}{2} + V(x)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $x$ . Quindi per  $E > V(P_1)$  avremo traiettorie periodiche intorno a  $P_1$ . Per  $V(P_2) < E < V(P_0) = 1$  avremo sia traiettorie periodiche intorno al punto stabile  $P_2$  sia traiettorie aperte con asintoto la retta  $x = 2$  definite per  $x > \bar{x}$  con  $\bar{x}$  tale che  $V(\bar{x}) = E$ . Per  $E = 1$  abbiamo la traiettoria che interseca l'asse  $x$  con tangente obliqua. Per  $E > 1$  avremo traiettorie aperte con  $\lim_{x \rightarrow 2^-} = +\infty$

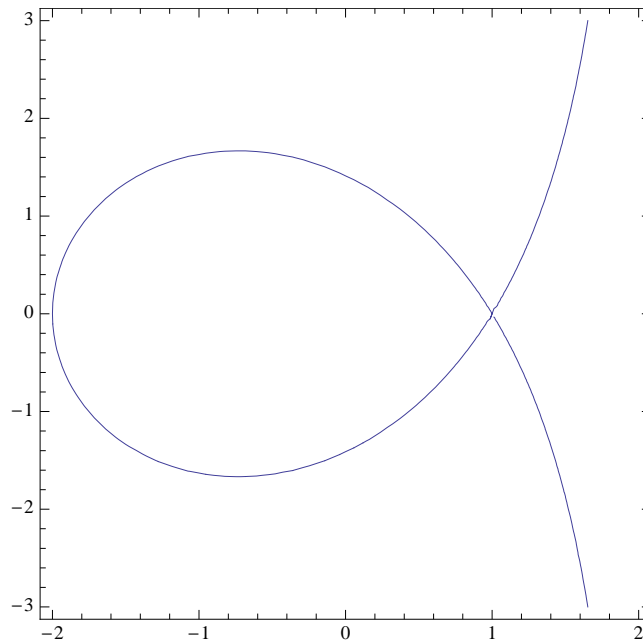


Figura 3: Grafico della curva  $E = 1$ .

Le altre curve di livello saranno

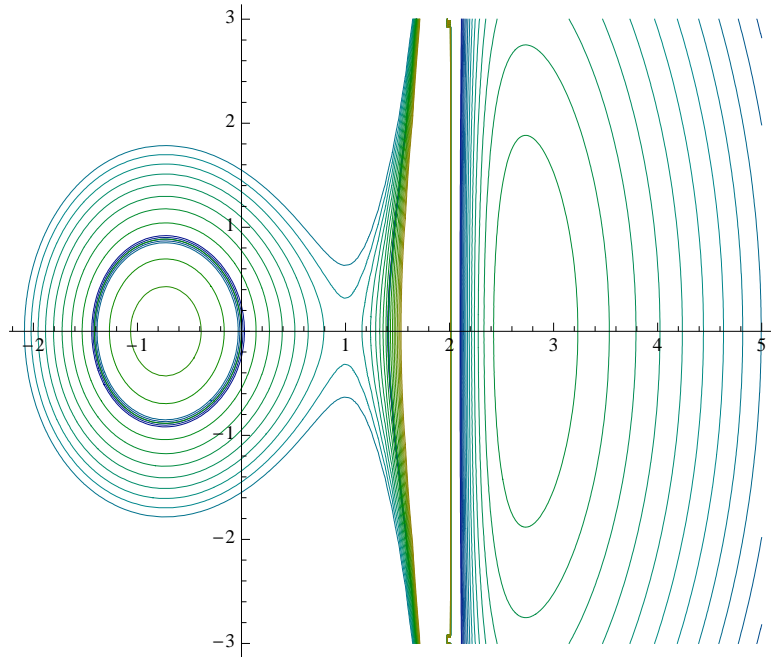


Figura 4: Grafico del piano delle fasi.

**Esercizio 2. 2.1 Sistema dinamico associato.** Posto  $y = \dot{x}$  abbiamo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV}{dx}(x) = -xe^{-x^2}(-4x^3 + 6x^2 + 6x - 8) = -xe^{-x^2}(x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \end{cases}$$

con  $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$  e  $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$ .

**2.2**

$$\dot{E} = y\dot{y} + V'(x)\dot{x} = -V'(x)y + V'(x)y = 0$$

**2.3 Grafico del potenziale.** Notiamo che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0$ . Inoltre  $V'(x) > 0$  per  $\alpha_2 < x < 0$  e per  $1 < x < \alpha_1$  e negativa altrimenti. Quindi abbiamo un minimo in  $x = 1$  e  $x = \alpha_2$ , un massimo in  $x = \alpha_1$  e  $x = 0$ . Perciò il grafico del potenziale sarà:

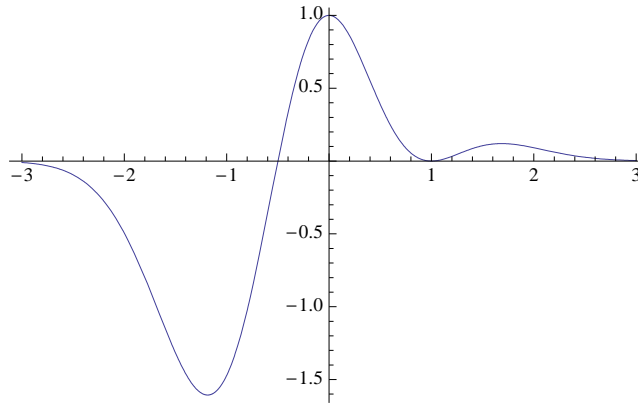


Figura 5: Grafico di  $V(x)$

**2.4 Punti di equilibrio e stabilità.** Abbiamo equilibrio nei punti del tipo  $(x_0, 0)$  con  $x_0$  punto critico del potenziale. I punti di equilibrio saranno perciò:

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (\alpha_1, 0), \quad P_3 = (\alpha_2, 0)$$

Inoltre dal teorema di Dirichelet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti del tipo  $(x_0, 0)$  con  $x_0$  punto di minimo del potenziale. Perciò i punti  $P_3$  e  $P_1$  saranno stabili.

**2.5 Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V(x)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $x$ . Inoltre  $x = \alpha_2$  è un minimo assoluto del potenziale, quindi il moto sarà possibile solo per  $E > V(\alpha_2)$ . Per  $V(\alpha_2) < E < 0$  avremo traiettorie periodiche intorno al punto  $P_3$  mentre per  $E = 0$  avremo due traiettorie aperte con  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ . Con  $0 < E < V(1)$  avremo due traiettorie aperte con  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ , traiettorie periodiche intorno al punto stabile  $P_1$  e altre traiettorie aperte con  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ . Per  $E = V(1)$  avremo due traiettorie aperte con  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ , il punto instabile  $P_2$ , e traiettorie aperte con  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ . Per  $V(1) < E < V(0)$  avremo ancora traiettorie con  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$  e due con  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ . Per  $E = V(0)$  avremo traiettorie aperte e il punto instabile  $P_0$ , con  $E > V(0)$  avremo due traiettorie di cui una con  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \sqrt{2E}$ , e l'altra con  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$ .

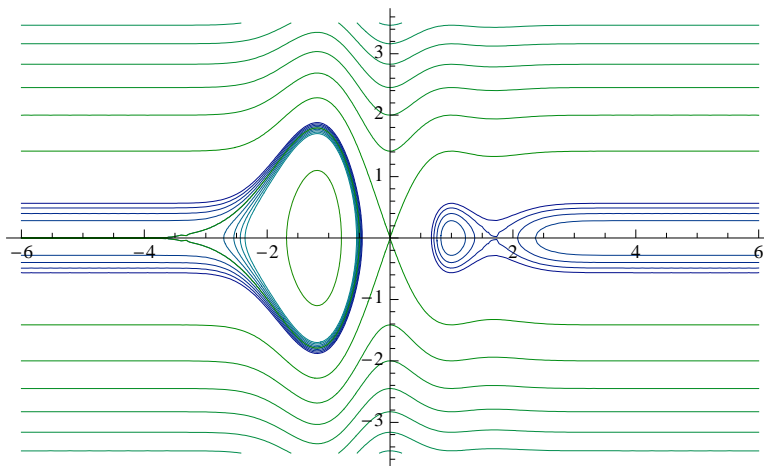


Figura 6: Grafico del piano delle fasi.

**2.6 Traiettorie periodiche.** Per quanto visto nel punto precedente abbiamo traiettorie periodiche in

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, V(\alpha_2) < y^2/2 + V(x) < 0\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \bar{x} < x < 1, 0 < y^2/2 + V(x) < V(\alpha_1)\}$$

con  $\bar{x}$  tale che  $V(\bar{x}) = V(\alpha_1)$  e  $0 < \bar{x} < \alpha_1$ .

### ESERCIZIO 3.

- Essendo  $m = 1$ , abbiamo che  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = -12x^3 + 24\alpha x^2 - 12x$  e dunque, posto  $y = \dot{x}$ , si ottiene il sistema dinamico 
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -12x^3 + 24\alpha x^2 - 12x \end{cases}$$
- I punti critici sono tutti e soli quelli del tipo  $(x_0, 0)$ , con  $x_0$  punto critico di  $V$ , cioè è soluzione di  $-12x^3 + 24\alpha x^2 - 12x = 0 = -12x(x^2 - 2\alpha x - 1)$ , dunque se  $\alpha > 1$  otteniamo i tre punti  $x = 0$  e  $x_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$ , se  $\alpha = 1$  abbiamo  $x = 0$  e  $x = 1$ , mentre se  $0 < \alpha < 1$  l'unico punto critico di  $V$  è  $x = 0$ .  
Per discutere la stabilità, notiamo che, avendo  $V$  solo punti critici isolati,  $(x_0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile se e solo se  $x_0$  è un punto di minimo per  $V$ ; per stabilire quando questo accade studiamo il segno di  $V'(x)$ : se  $0 < \alpha < 1$ , il polinomio  $x^2 - 2\alpha x - 1$ , e dunque  $V'(x) = 12x(x^2 - 2\alpha x - 1)$  è positiva per  $x > 0$  e negativa per  $x < 0$ , e pertanto l'origine è un minimo per  $V$  e quindi è un p.d.e. stabile; se invece  $\alpha = 1$ , abbiamo che  $V'(x) = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x - 1)^2$ , che è positivo per  $1 \neq x > 0$  e negativo per  $x < 0$ , quindi l'origine è sempre un massimo, e dunque stabile, mentre  $x = 1$  è un flesso, quindi instabile; infine, se  $\alpha > 1$ , abbiamo che  $V'(x) = 12x(x^2 - 2\alpha x - 1) = 12x(x - x_-)(x - x_+) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, x_-) \cup (x_+, +\infty)$  e quindi il punto  $x_-$  è di massimo mentre  $x_+$  e  $0$  sono entrambi minimi, perciò il primo è stabile e gli altri due instabili.
- Il grafico della funzione  $V(x)$  può essere tracciato facilmente grazie allo studio della derivata prima di  $V$  fatto in precedenza, e notando che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$  per qualsiasi valore di  $\alpha$ , distinguendo i casi a seconda che  $\alpha$  sia maggiore, minore o uguale a 1.
- Il moto avviene lungo le curve di livello della funzione  $y^2/2 + V(x)$ , cioè lungo curve del tipo  $y = \pm\sqrt{2E - 2V(x)}$ ; se  $\alpha < 1$ , la curva corrispondente al valore di energia  $E = 0$  è costituita solo dall'origine, che è un punto di equilibrio stabile, mentre per  $E > 0$  abbiamo

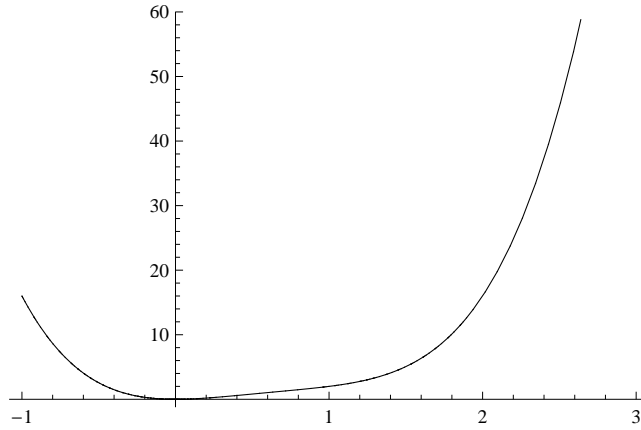


Figura 7: Grafico della funzione  $V(x)$  per  $\alpha < 1$

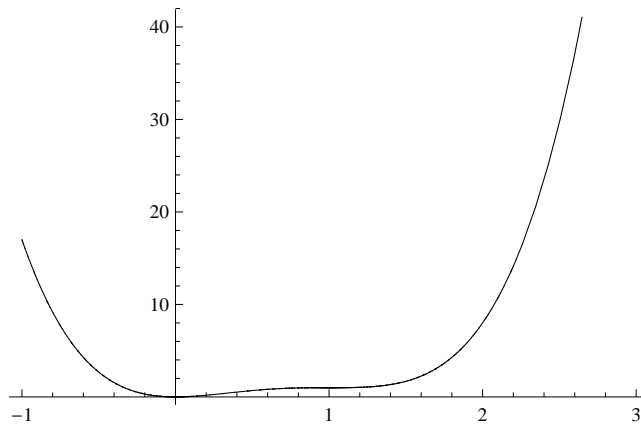


Figura 8: Grafico della funzione  $V(x)$  per  $\alpha = 1$

curve chiuse simmetriche rispetto all'asse orizzontale, e dunque traiettorie periodiche: la situazione è quella descritta in figura.

Se  $\alpha = 1$  la situazione è la seguente: per  $E = 0$  abbiamo solo il p.d.e.  $(0, 0)$ , se  $0 < E < V(1) = 1$  otteniamo traiettorie periodiche, per  $E = 1$  una traiettoria omoclina tendente al punto  $(1, 0)$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ , e infine per  $E > 1$  ci sono ancora traiettorie periodiche.

Se  $\alpha > 1$ , la curva di livello di  $E = V(x_+)$  contiene solo il punto stabile  $(x_+, 0)$ , mentre per  $v(x_+) < E < 0$  abbiamo traiettorie periodiche, per  $E = 0$  ci sono una traiettoria periodica simile alle precedenti e un'altra costituita solo dall'origine; poi, per  $0 < E < V(x_-)$  abbiamo due traiettorie periodiche, aventi ognuna un p.d.e. stabile al proprio interno, mentre per  $E = V(x_-)$  otteniamo due traiettorie omocline tendenti al punto  $x_-$  per  $t \rightarrow \pm\infty$  con tangenza obliqua; infine, per  $E > V(x_-)$  ogni curva di livello contiene un'unica traiettoria periodica.

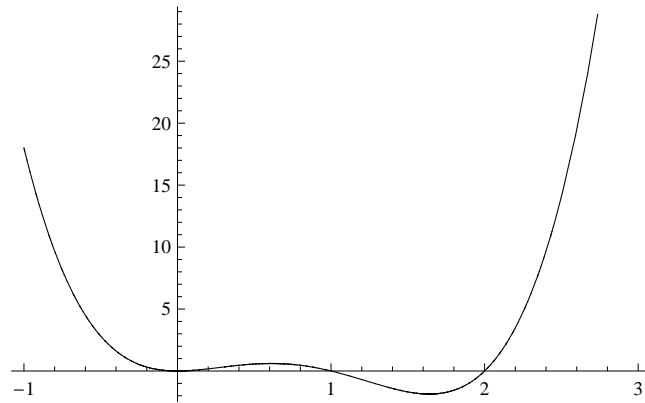


Figura 9: Grafico della funzione  $V(x)$  per  $\alpha > 1$

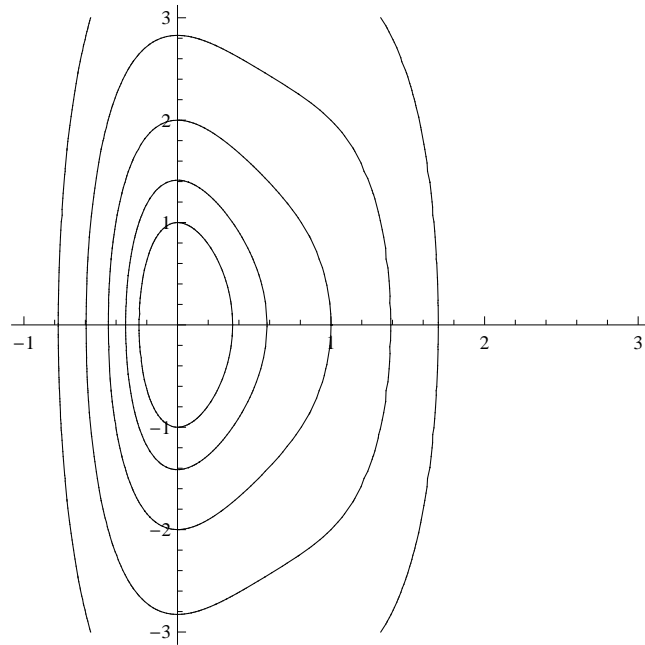


Figura 10: Piano delle fasi per  $\alpha < 1$

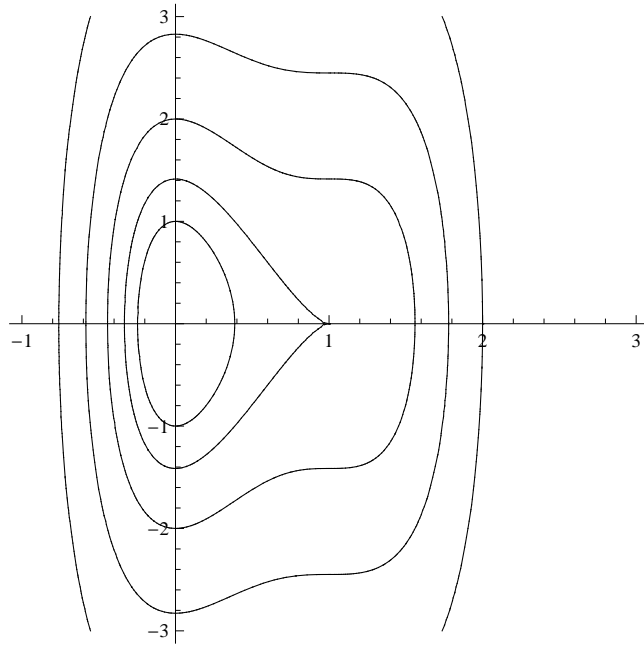


Figura 11: Piano delle fasi per  $\alpha = 1$

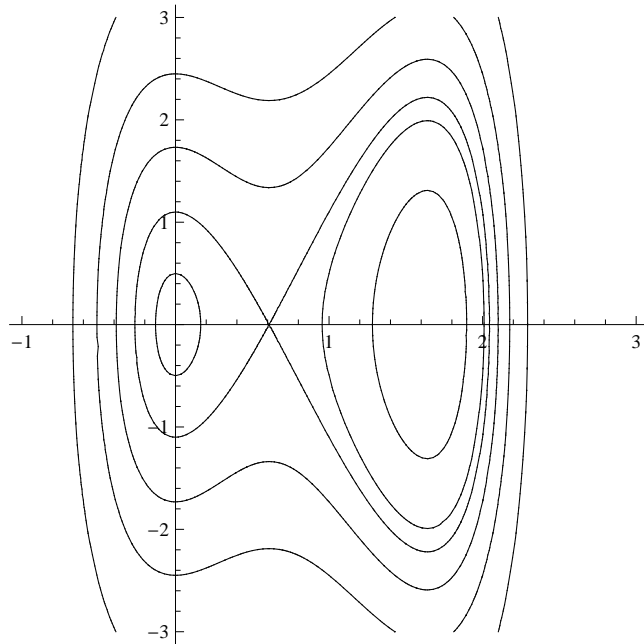


Figura 12: Piano delle fasi per  $\alpha > 1$



**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO 8 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

1. Le equazioni del sistema dinamico associato sono  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} = -(x^3 + 3x^2) e^x \end{cases}$
2. I punti di equilibrio sono tutti e soli quelli della forma  $(x_0, 0)$ , con  $x_0$  punto critico del potenziale, dunque essendo  $V'(x) = (x^3 + 3x^2) e^x$ , otteniamo i due p.d.e.  $(-3, 0)$  e  $(0, 0)$ . Per studiare la stabilità di questi punti, ricordiamo che se  $x_0$  è un punto di minimo isolato per  $V$ , allora  $(x_0, 0)$  è stabile, mentre se è un massimo o un flesso, il p.d.e. sarà instabile; dunque, è sufficiente studiare il segno della derivata prima del potenziale: poiché  $x^2 e^x \geq 0$ , allora  $V'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -3$  e  $V'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$ , dunque  $x_0 = -3$  è un minimo e  $x_0 = 0$  è un flesso, pertanto l'origine è instabile mentre l'altro punto di equilibrio è stabile.
3. Notiamo che  $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = 0$ , dunque grazie allo studio di  $V'(x)$  fatto in precedenza, possiamo tracciare il grafico del potenziale come in figura.

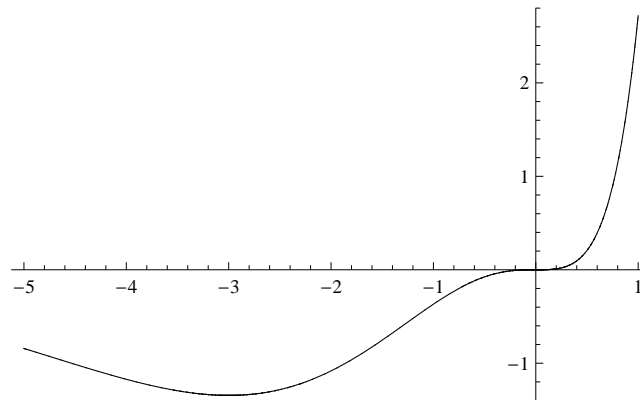


Figura 1: Grafico della funzione  $V(x) = x^3 e^x$

4. Il moto avviene lungo le curve di livello  $y^2/2 + V(x) = E$ : le traiettorie sono definite solamente per  $E > V(-3) = -27e^{-3}$ ; per questo valore di energia otteniamo l'unica traiettoria formata dal punto di equilibrio  $(-3, 0)$ , mentre se  $-27e^{-3} < E < V(0) = 0$  otteniamo traiettorie periodiche; per  $E = 0$  otteniamo la traiettoria costituita dal punto di equilibrio instabile e altre due curve aperte, simmetriche rispetto all'asse delle ascisse, tendenti asintoticamente all'origine e tali che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2V(x)} = 0$ ; infine, se  $E > 0$ , abbiamo una traiettoria aperta con  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(t) = \pm\sqrt{2E}$ . La situazione è quella descritta dalla seguente figura.
5. In base allo studio qualitativo fatto in precedenza, possiamo dedurre che i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono tutti e soli quelli appartenenti all'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y^2/2 + V(x) < 0\}$ .

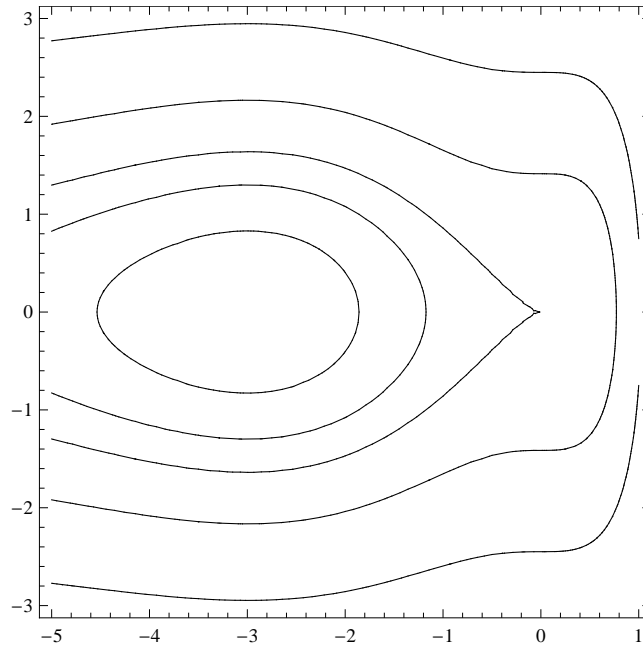


Figura 2: Grafico del piano delle fasi

ESERCIZIO 2.

1. L'equazione del moto è  $m\ddot{x} = \ddot{x} = F(x) = 5x^3 - 2x^7$ , dunque ponendo  $\dot{x} = y$  otteniamo il sistema dinamico associato  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = 5x^3 - 2x^7 \end{cases}$ .
2. I punti di equilibrio sono tutti e soli quelli del tipo  $(x_0, 0)$ , con  $x_0$  soluzione di  $F(x) = 0$ , dunque essendo  $F(x) = x^3(5 - 2x^4)$ , otteniamo i tre punti di equilibrio  $(0, 0)$  e  $\left(\pm\sqrt[4]{\frac{5}{2}}, 0\right)$ . Per discuterne la stabilità, studiamo prima l'energia potenziale.
3. Poiché dev'essere  $F(x) = -V'(x)$ , a partire da  $F$  determiniamo il potenziale semplicemente cambiando di segno e integrando, ponendo poi la costante di integrazione in modo che  $V(0) = 0$ : si ottiene facilmente  $V(x) = \frac{x^8}{4} - \frac{5}{4}x^4 = \frac{x^4}{4}(x^4 - 5)$ : si ha dunque che  $V(x) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt[4]{5}$  e  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$ , inoltre ovviamente  $V'(x) = -F(x) = 2x^7 - 5x^3 = x^3(2x^4 - 5)$ : poiché  $V'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right)$  e  $V'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt[4]{\frac{5}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{5}{2}}, +\infty\right)$ , concludiamo che  $x_0 = 0$  è un punto di massimo per  $V$  mentre  $x_0 = \pm\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$  sono due minimi, dunque l'origine è un punto di equilibrio instabile mentre gli altri due punti di equilibrio sono instabili; sulla base di queste informazioni, tracciamo il grafico di  $V(x)$ .
4. Notiamo innanzi tutto che le traiettorie sono definite solamente per  $E > V\left(\pm\sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{175}{64}$ : per questo valore di energia le uniche traiettorie sono quelle costituite dai due punti di equilibrio stabili; se invece  $-\frac{175}{64} < E < 0$ , per ogni valore di  $E$  otteniamo due traiettorie

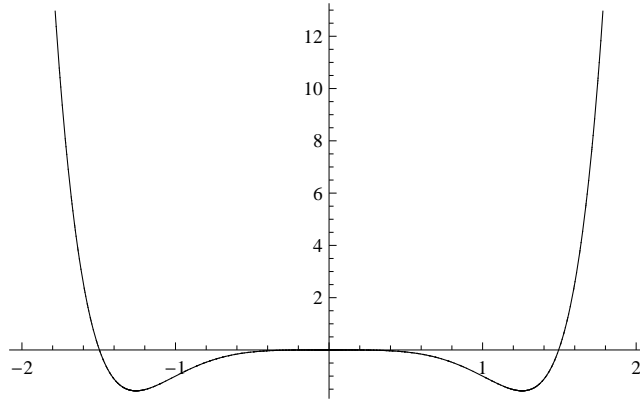


Figura 3: Grafico della funzione  $V(x) = \frac{x^8}{4} - \frac{5}{4}x^4$

periodiche, la prima ottenuta dalla seconda per simmetria attraverso l'asse verticale; per  $E = 0$  otteniamo tre traiettorie: il punto di equilibrio  $(0, 0)$  e due traiettorie omocline che tendono a quel punto per  $t \rightarrow \pm\infty$ , che si congiungono nell'origine con tangenza orizzontale perché  $V''(0) = 14x^6 - 15x^2|_{x=0} = 0$ . La situazione è rappresentata dalla seguente figura.

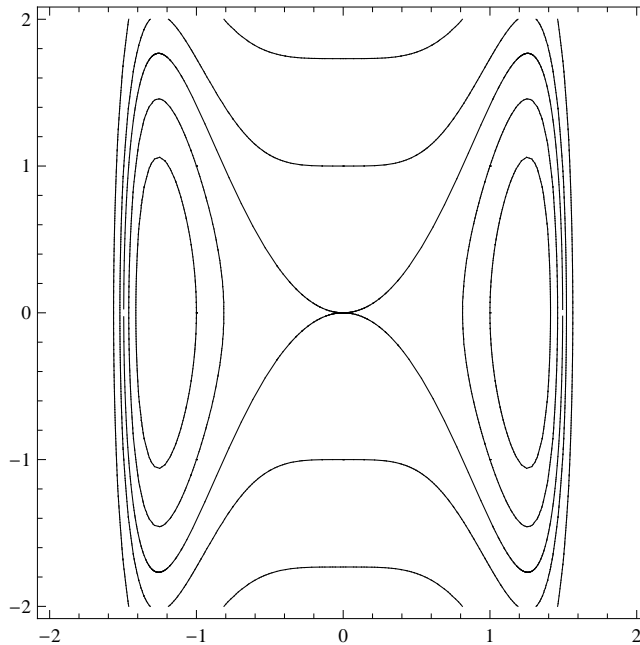


Figura 4: Grafico del piano delle fasi

5. La traiettoria con dati iniziali  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = (1, 0)$  è periodica perché avviene sulla curva di livello  $y^2/2 + V(x) = -1$  e  $-\frac{175}{64} < -1 < 0$ .

La curva di livello corrispondente è  $y^2/2 + \frac{x^8}{4} - \frac{5}{4}x^4 + 1 = 0$ , che interseca l'asse delle  $x$  nei punti tali che  $\frac{x^8}{4} - \frac{5}{4}x^4 + 1 = \frac{(x^4 - 4)(x^4 - 1)}{4} =$

= 0, cioè  $x = \pm 1$  e  $x = \pm\sqrt{2}$ ; tuttavia, il moto si svolge sulla componente connessa di questa curva che appartiene al semipiano di destra, dunque i punti in cui di intersezione dell'orbita con l'asse orizzontale sono  $(0, 1)$  e  $(0, \sqrt{2})$ , pertanto il periodo sarà dato da  $T =$

$$= \sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{-1 - \frac{x^8}{4} + \frac{5}{4}x^4}} = 2\sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{-4 - x^8 + 5x^4}} = 2\sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x^4 - 1)(4 - x^4)}} =$$

$$= 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x-\sqrt{2})(x^3+x^2+x+1)(x^3+\sqrt{2}x^2+2x+2\sqrt{2})}}.$$

Posti  $\Phi_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  e  $\Phi_2(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{2}$ , notiamo che per  $x \in [1, \sqrt{2}]$  sono entrambe quantità positive e crescenti, dunque  $\Phi_1(1) \leq \Phi_1(x) \leq \Phi_1(\sqrt{2})$  e  $\Phi_2(1) \leq \Phi_2(x) \leq \Phi_2(\sqrt{2})$ , quindi

$$\frac{1}{\sqrt{8\sqrt{2}(3+3\sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(\sqrt{2})\Phi_2(\sqrt{2})}} \leq \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)\Phi_2(x)}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(1)\Phi_2(1)}} = \frac{1}{\sqrt{4(3+3\sqrt{2})}}; \text{ sapendo poi che } \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x-\sqrt{2})}} =$$

$$= \pi, \text{ otteniamo immediatamente che } \frac{\pi}{\sqrt{6+3\sqrt{2}}} \leq T \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3+3\sqrt{2}}}$$

### ESERCIZIO 3.

**Equazioni sistema associato.** Le equazioni sono

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV}{dx} = -(3x^2 - 4 - \frac{\alpha}{x^2}) = -\frac{3x^4 - 4x^2 - \alpha}{x^2} \end{cases}$$

**Punti di equilibrio e stabilità.** I punti di equilibrio saranno del tipo  $(x_0, 0)$  con  $x_0$  punto critico per il potenziale. Distinguiamo i vari casi  $\alpha = 0$  e  $\alpha \neq 0$  e studiamo  $V'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Rightarrow V'(x) = 3x^2 - 4 \\ \alpha \neq 0 &\Rightarrow V'(x) = 3x^2 - 4 - \frac{\alpha}{x^2} = \frac{3x^4 - 4x^2 - \alpha}{x^2} \end{aligned}$$

Quindi per  $\alpha = 0$  abbiamo 2 soluzioni  $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ , un massimo e un minimo. Se  $\alpha \neq 0$  abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha < -\frac{4}{3} \Rightarrow & x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3\alpha}}{3} \quad \text{no sol.} \\ \alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow & x^2 = \frac{2}{3} \quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{4}{3} < \alpha < 0 \Rightarrow & x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3\alpha}}{3} \quad x = \pm\sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{4 + 3\alpha}}{3}} \\ \alpha > 0 \Rightarrow & x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3\alpha}}{3} \quad x = \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{4 + 3\alpha}}{3}} \end{array} \right.$$

Sappiamo che i punti di equilibrio stabili sono i punti  $(x_0, 0)$  con  $x_0$  minimo per il potenziale. Per  $\alpha = 0$  abbiamo un punto stabile e uno instabile. Per  $\alpha < -\frac{4}{3}$  non abbiamo punti di equilibrio, e notiamo che  $V'(x)$  è sempre positiva. Per  $\alpha = -\frac{4}{3}$  abbiamo che  $V'(x)$  è ancora sempre positiva, quindi  $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$  sono dei flessi, perciò instabili. Per  $-\frac{4}{3} < \alpha < 0$  abbiamo 4 punti di

equilibrio. Chiamiamo

$$\alpha_1 = \frac{2 + \sqrt{4 + 3\alpha}}{3} \quad \alpha_2 = \frac{2 - \sqrt{4 + 3\alpha}}{3}$$

e notiamo che  $V'(x) < 0$  per  $-\sqrt{\alpha_1} < x < -\sqrt{\alpha_2}$  e per  $\sqrt{\alpha_2} < x < \sqrt{\alpha_1}$ . Quindi abbiamo dei massimi in  $-\sqrt{\alpha_1}$  e  $\sqrt{\alpha_2}$  e dei minimi negli altri due punti. Quindi abbiamo due punti di equilibrio stabili. Per  $\alpha > 0$  abbiamo 2 punti critici per  $x = \pm\sqrt{\alpha_1}$  con  $V'(x) < 0$  per  $-\sqrt{\alpha_1} < x < \sqrt{\alpha_1}$ . Abbiamo perciò un minimo per  $x = \sqrt{\alpha_1}$ , quindi è un punto di equilibrio stabile, e un massimo per  $x = -\sqrt{\alpha_1}$ , quindi instabile.

**Grafico potenziale.** Per  $\alpha = 0$  abbiamo Per  $\alpha \neq 0$  abbiamo

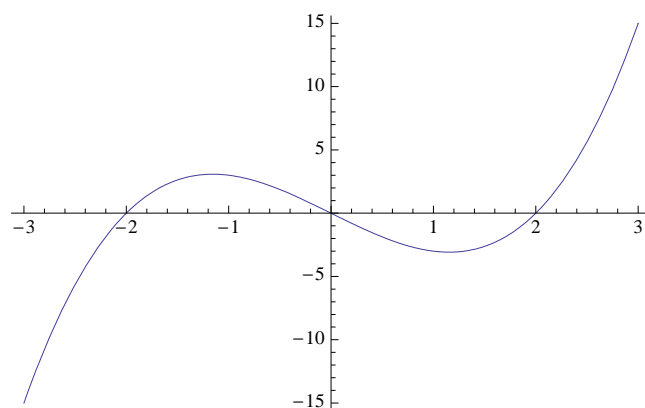


Figura 5: Grafico di  $V(x)$  con  $\alpha = 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha < -\frac{4}{3} \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \mp\infty \\ \alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \mp\infty \\ -\frac{4}{3} < \alpha < 0 \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \mp\infty \\ \alpha > 0 \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \pm\infty \end{array} \right.$$

Abbiamo perciò

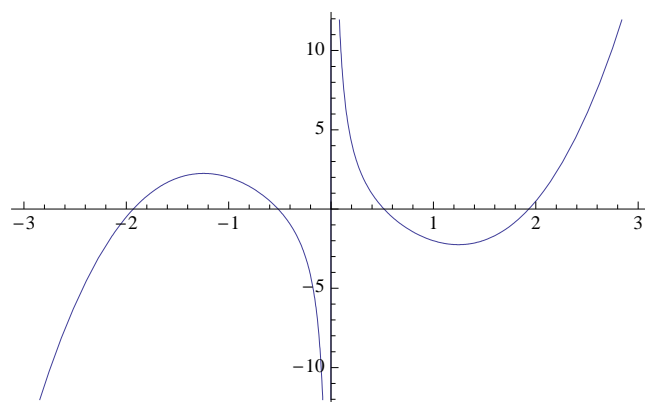


Figura 6: Grafico di  $V(x)$  con  $\alpha > 0$

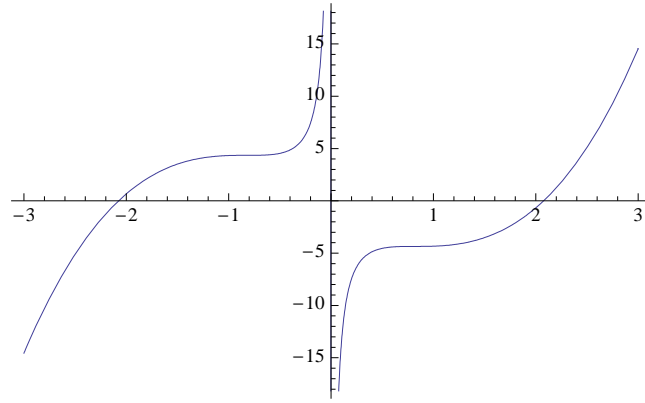


Figura 7: Grafico di  $V(x)$  con  $\alpha = -\frac{4}{3}$

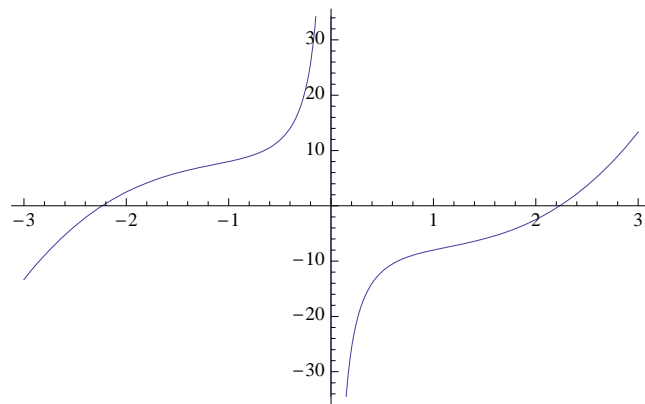


Figura 8: Grafico di  $V(x)$  con  $\alpha < -\frac{4}{3}$

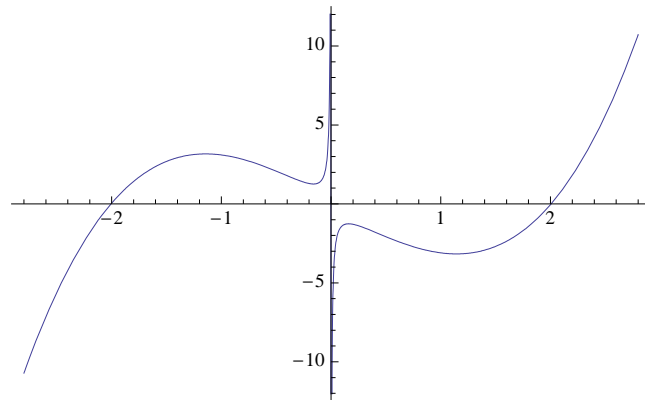


Figura 9: Grafico di  $V(x)$  con  $-\frac{4}{3} < \alpha < 0$

**Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V(x)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$ . Avremo perciò curve simmetriche rispetto all'asse  $x$ . Consideriamo  $\alpha > 0$ , nel semipiano  $x > 0$  avremo traiettorie periodiche intorno al punto di equilibrio stabile. Per  $x < 0$  avremo traiettorie con  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \pm\infty$  e traiettorie tali che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\infty$  fino a che  $E = V(-\sqrt{\alpha_1})$ , con  $\alpha_1 = (2 + \sqrt{4 + 3\alpha})/3$  il punto di massimo, per cui avremo traiettorie che intersecano l'asse delle  $x$  con tangente obliqua. Per  $\alpha = -\frac{4}{3}$  avremo traiettorie tali che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \pm\infty$ ,

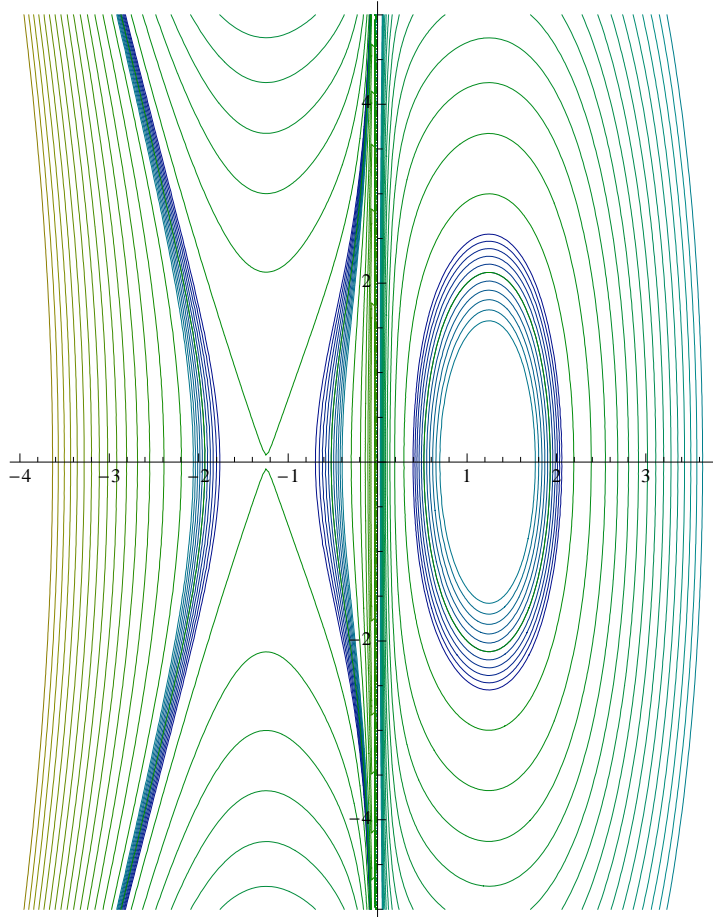


Figura 10: Piano delle fasi per  $\alpha > 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\infty$  e quando  $E = V(\pm\sqrt{\frac{2}{3}})$  avremo una cuspidi in  $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Per  $\alpha < -\frac{4}{3}$  non abbiamo punti di equilibrio. Avremo solo traiettorie tali che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \pm\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\infty$ . Per  $-\frac{4}{3} < x < 0$  avremo traiettorie periodiche intorno ai due punti di minimo  $x = \sqrt{\alpha_1}$  e  $x = \sqrt{-\sqrt{\alpha_2}}$  e traiettorie con  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \pm\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\infty$ . Con  $E = V(-\sqrt{\alpha_1})$  e per  $E = V(\sqrt{\alpha_2})$  (in corrispondenza dei massimi) abbiamo traiettorie che attraversano l'asse con tangente obliqua. Per  $\alpha = 0$  abbiamo traiettorie periodiche intorno al punto stabile  $(\sqrt{\frac{4}{3}}, 0)$  e traiettorie tali che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\infty$ . Per  $E = V(-\sqrt{\frac{4}{3}})$  avremo una traiettoria che attraversa l'asse delle  $x$  con tangente obliqua.

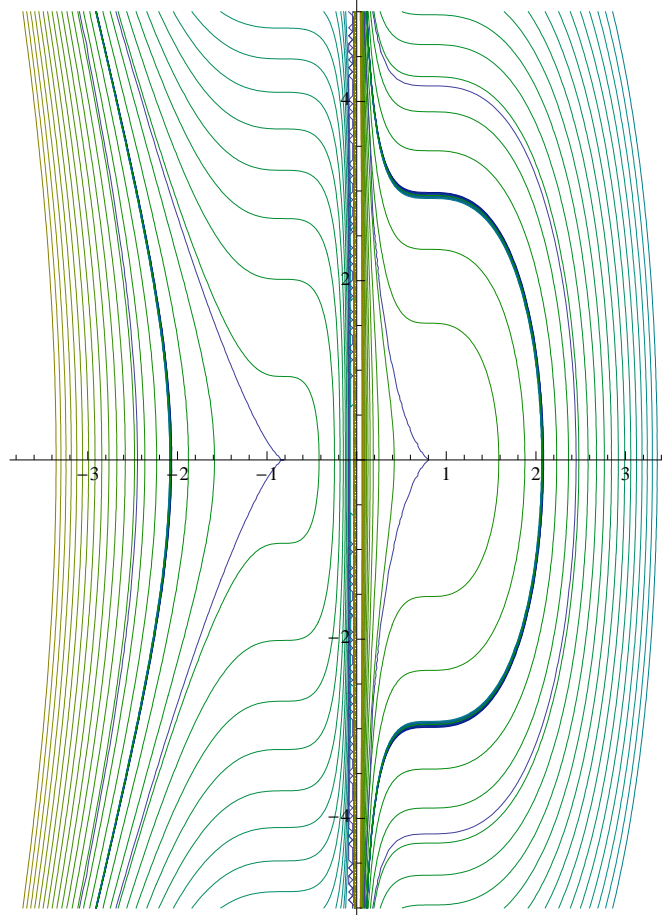


Figura 11: Piano delle fasi per  $\alpha = -\frac{4}{3}$



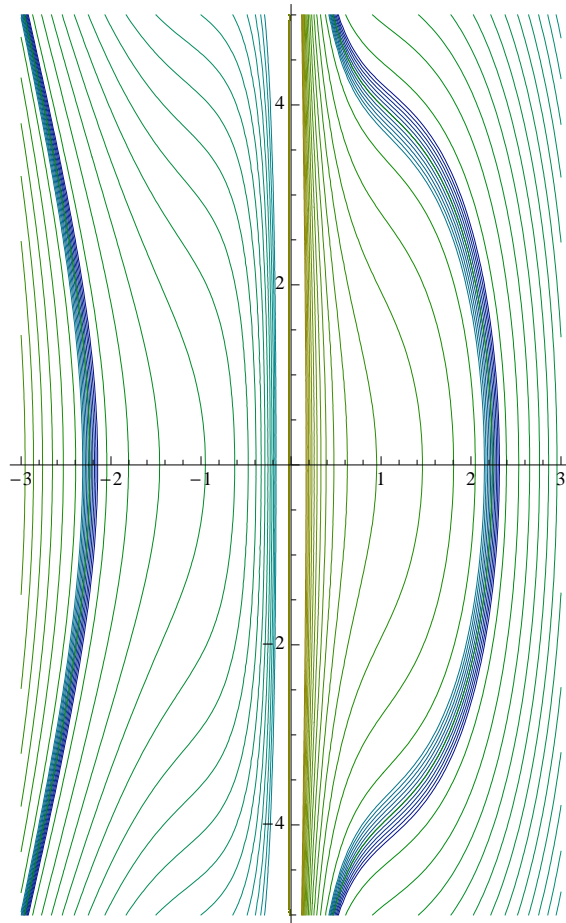


Figura 12: Piano delle fasi per  $\alpha < -\frac{4}{3}$

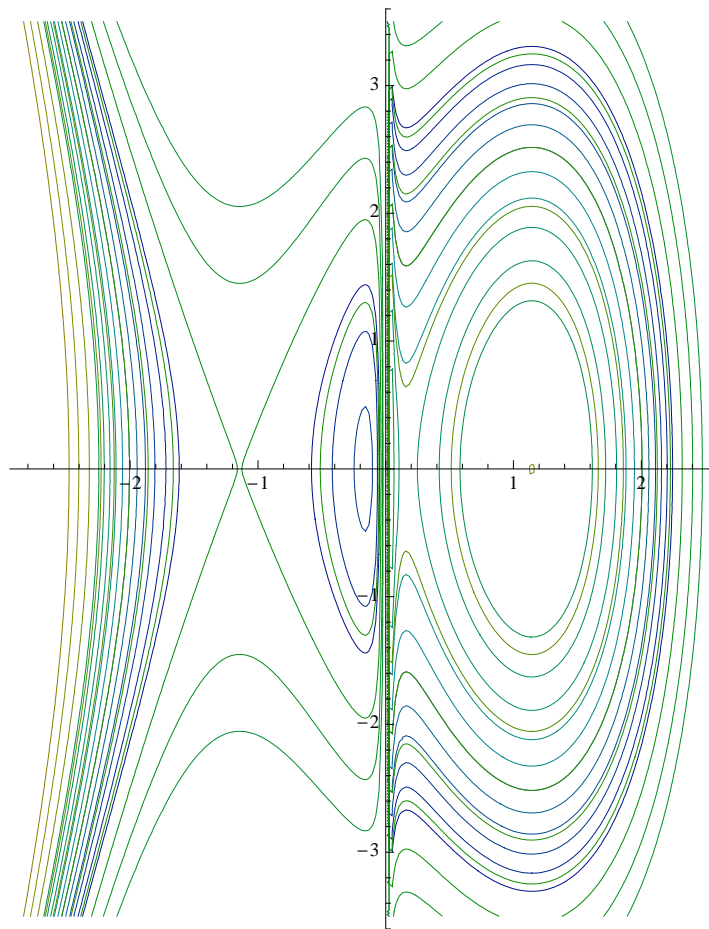


Figura 13: Piano delle fasi per  $-\frac{4}{3} < \alpha < 0$

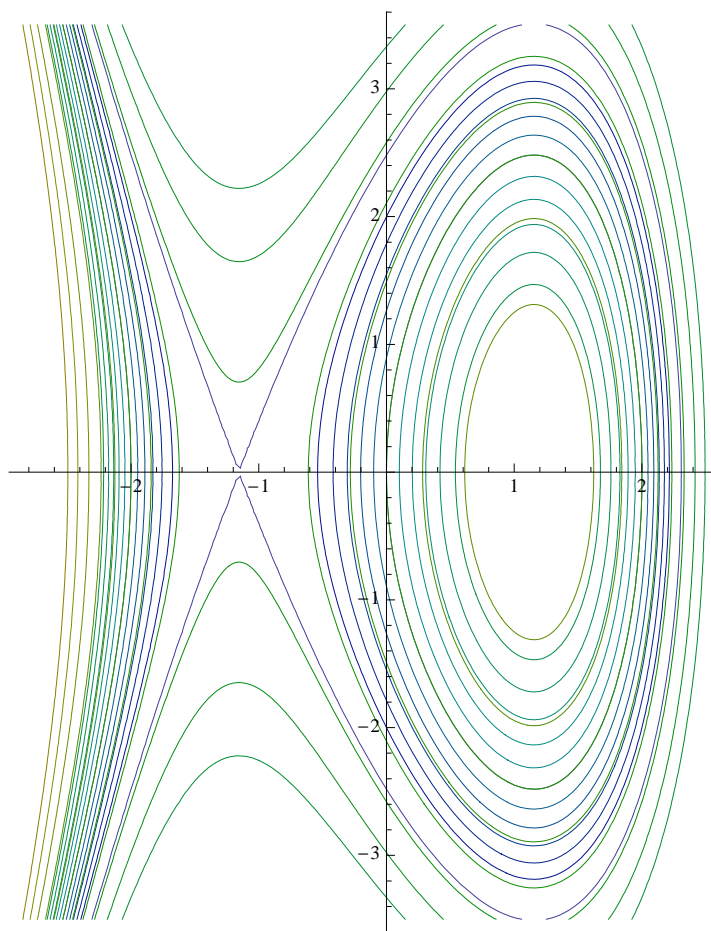


Figura 14: Piano delle fasi per  $\alpha = 0$

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO 9 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

1. Come noto, nel sistema del centro di massa il sistema si disaccoppia, nelle variabili polari

$$(\rho, \theta), \text{ nei due problemi } \begin{cases} \mu \ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} \\ \dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2} \end{cases}, \text{ ove } V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \text{ e in questo caso}$$

$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = 1$ ; per lo studio dell'equazione della variabile radiale, ci si riconduce al

$$\text{sistema dinamico } \begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{\rho} - \frac{4}{\rho^5} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}.$$

2. I punti di equilibrio del sistema associato sono tutti e soli quelli della forma  $(\rho_0, 0)$ , ove  $\rho_0$  è un punto critico del potenziale efficace, cioè tale che  $V'_{eff}(\rho_0) = 0$ : essendo

$$V_{eff}(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{4}{\rho^5} - \frac{L^2}{\rho^3} = \frac{\rho^4 - L^2\rho^2 + 4}{\rho^5}, \text{ dovrà essere } \rho_0 = \sqrt{\frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 16}}{2}};$$

affinché questa espressione abbia senso, dev'essere  $L^4 - 16 \geq 0$ , e quando questo è verificato anche l'espressione sotto l'altra radice è non negativa,

perché  $L^2 + \sqrt{L^4 - 16} \geq 0$  e  $L^2 - \sqrt{L^4 - 16} \geq 0 \Leftrightarrow L^2 \geq \sqrt{L^4 - 16} \Leftrightarrow L^4 \geq L^4 - 16 \Leftrightarrow 0 \geq -16$ : otteniamo quindi due soluzioni  $\rho_{\pm}$  se  $L > 2$ , una soluzione  $\rho_0 = \sqrt{2}$  se  $L = 2$  e nessuna se  $0 \leq L < 2$ .

Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio, ricordiamo che un p.d.e. è stabile se  $\rho_0$  è di minimo isolato per  $V_{eff}(\rho)$ , mentre è instabile se  $\rho_0$  è un punto di massimo o un flesso:

se  $L > 2$ ,  $V_{eff}(\rho) = \frac{(\rho^2 - \rho_-^2)(\rho^2 - \rho_+^2)}{\rho^5}$ , che è positiva per  $\rho < \rho_-$  e  $\rho > \rho_+$  e negativa per  $\rho_- < \rho < \rho_+$ ,

dunque  $(\rho_-, 0)$  è un p.d.e. instabile mentre  $(\rho_+, 0)$  è stabile; se invece  $L = 2$ ,

$$V_{eff}(\rho) = \frac{(\rho^2 - 2)^2}{\rho^5} > 0 \quad \forall \rho \neq \sqrt{2}, \text{ quindi il punto } (\rho_0, 0) = (\sqrt{2}, 0) \text{ è instabile.}$$

3. Sulla base dello studio di  $V'_{eff}(\rho)$  e sapendo che per qualsiasi valore di  $L$  si ha che  $\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) = -\infty$  e  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$ , possiamo tracciare il grafico del potenziale efficace, differenziando ovviamente i casi  $L > 2$ ,  $L = 2$  e  $L < 2$ :

4. Il moto avviene lungo le curve di livello  $\frac{y^2}{2} + V_{eff}(\rho) = E$ . Distinguiamo anche qui i tre casi a seconda del modulo del momento angolare.

Se  $L > 2$ , per  $E < V_{eff}(\rho_+)$  otteniamo traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow 0} y(\rho) = \pm\infty$ , mentre se

$E = V_{eff}(\rho_+)$  otteniamo, oltre alla traiettoria aperta simile alle precedenti, quella costituita dal punto di equilibrio stabile; se invece  $V_{eff}(\rho_+) < E < V_{eff}(\rho_-)$ , la curva di livello

contiene una traiettoria aperta, con caratteristiche simili alle precedenti, ed una chiusa; per  $E = V_{eff}(\rho_-)$  abbiamo il p.d.e. instabile e altre tre traiettorie asintotiche: una omoclina con

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \rho(t) = \rho_+$ , una giacente sul semipiano superiore, tendente al punto di equilibrio per  $t \rightarrow +\infty$  e l'altra, simmetrica alla precedente, che vi tende per  $t \rightarrow -\infty$ ;

infine, per  $E > V_{eff}(\rho_-)$ , otteniamo solo traiettorie aperte.

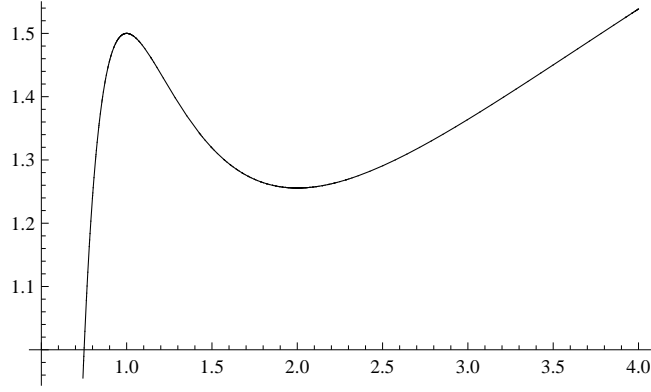


Figura 1: Grafico del potenziale efficace per  $L > 2$

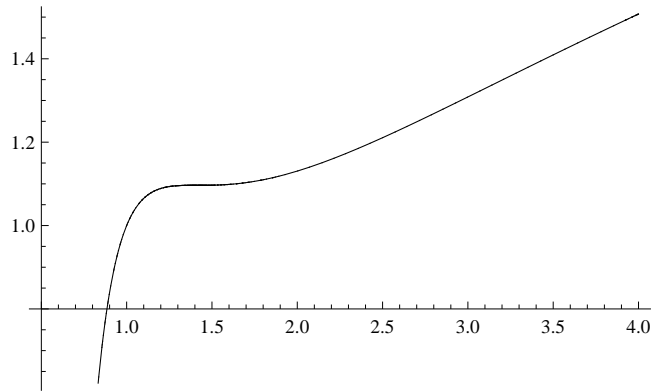


Figura 2: Grafico del potenziale efficace per  $L = 2$

Consideriamo ora il caso  $L = 2$ : in questo caso tutte le curve di livello, ad eccezione di quella dell'unico punto di livello corrispondente a  $E = V_{eff}(\sqrt{2}) = \frac{3}{4} + \log \sqrt{2}$ , sono costituite da una traiettoria aperta con  $y(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \pm\infty$ , mentre la curva contenente il p.d.e. contiene tre traiettorie: quella costituita dal solo punto di equilibrio, e altre due, simmetriche rispetto all'asse orizzontale, tendenti all'infinito in una direzione e al punto di equilibrio nell'altra.

Infine, per  $L < 2$ , otteniamo tutte curve aperte, simmetriche rispetto all'asse orizzontali, e tali che  $y(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \pm\infty$ .

5. Le traiettorie periodiche sono tutte e sole quelle che avvengono su curve chiuse prive di punti di equilibrio, dunque in base allo studio fatto nel punto precedente deduciamo che si hanno traiettorie periodiche solo per  $L > 2$ , e in questo caso i dati iniziali che le generano sono quelli appartenenti alla regione  $A = \left\{ (\rho, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho > \rho_-, V_{eff}(\rho_+) < \frac{y^2}{2} + V_{eff}(\rho) < V_{eff}(\rho_-) \right\}$ .

6. Essendo  $\dot{\theta} = \frac{L}{\rho^2}$ , allora la variazione dell'angolo  $\theta$  nell'intervallo  $[t_1, t_2]$  è data da  $\Delta\theta = \int_{t_1}^{t_2} \frac{L}{\rho^2(t)} dt$ .

Il moto complessivo è periodico in corrispondenza dei punti di equilibrio per la variabile radiale, oppure quando il moto per la variabile radiale è periodico e la variazione della

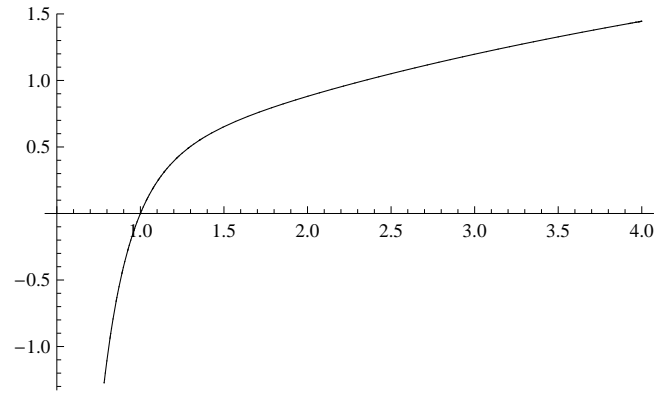


Figura 3: Grafico del potenziale efficace per  $L < 2$

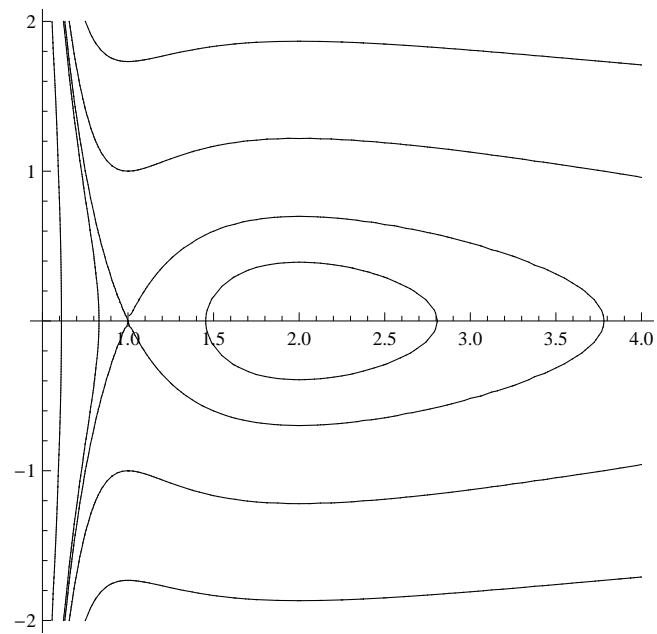


Figura 4: Grafico del piano  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $L > 2$

variabile angolare è commensurabile con  $2\pi$ , cioè se  $\exists q \in \mathbb{Q}$  tale che  $\int_0^T \frac{L}{\rho^2(t)} dt = 2\pi q$ ,  
ove  $T$  indica il periodo della variabile radiale.

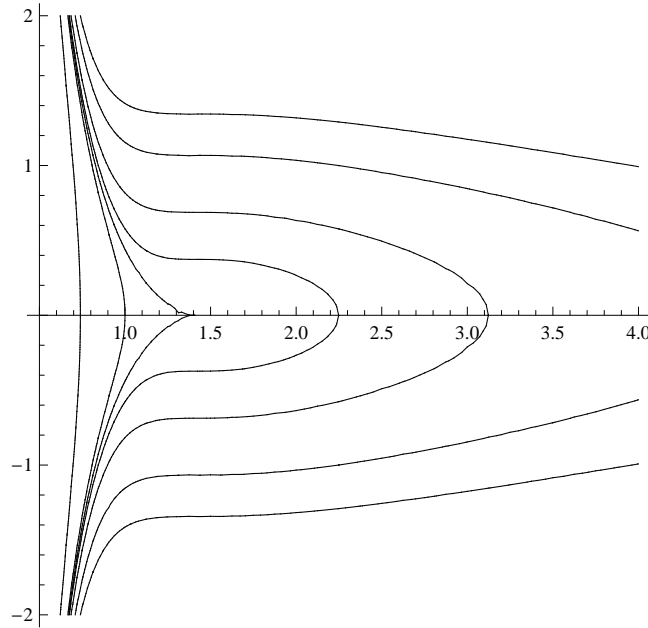


Figura 5: Grafico del piano  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $L = 2$

### ESERCIZIO 2.

**2.1 sistema dinamico associato.** Ricordiamo che nel sistema del centro di massa, il sistema si disaccoppia, in coordinate polari, nei due problemi

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho}, \quad \dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2}$$

e quindi, essendo  $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2 = 1$ , diventa

$$\ddot{\rho} = \frac{L^2}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} - \frac{2\alpha}{\rho^2}, \quad \dot{\theta} = \frac{L}{\rho^2}$$

poichè la parte angolare dipende esclusivamente della parte radiale ci concentreremo solo sulla prima delle due equazioni, il cui sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = \frac{L^2}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} - \frac{2\alpha}{\rho^2} \end{cases}$$

**2.2 Punti di equilibrio.** Sappiamo che i punti di equilibrio del sistema dinamico associato sono tutti e soli i punti della forma  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale efficace, quindi risolviamo l'equazione  $V'_{eff}(\rho) = 0$ . Si verifica che tale equazione ha soluzioni

$$\rho = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - L^2}}{-1} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - L^2}$$

quindi se  $\alpha \leq 0$  l'equazione non ammette soluzioni reali positive, (ricordiamo che  $\rho$  è un raggio e quindi non può essere un numero negativo). Se invece  $\alpha > 0$  abbiamo soluzioni se e solo se  $L^2 \leq \alpha^2$  cioè se  $|L| \leq \alpha$ . In particolare avremo quindi

- per  $|L| > \alpha$  nessun punto di equilibrio.
- per  $|L| = \alpha$  un solo punto di equilibrio in  $P_0 = (\alpha, 0)$ .

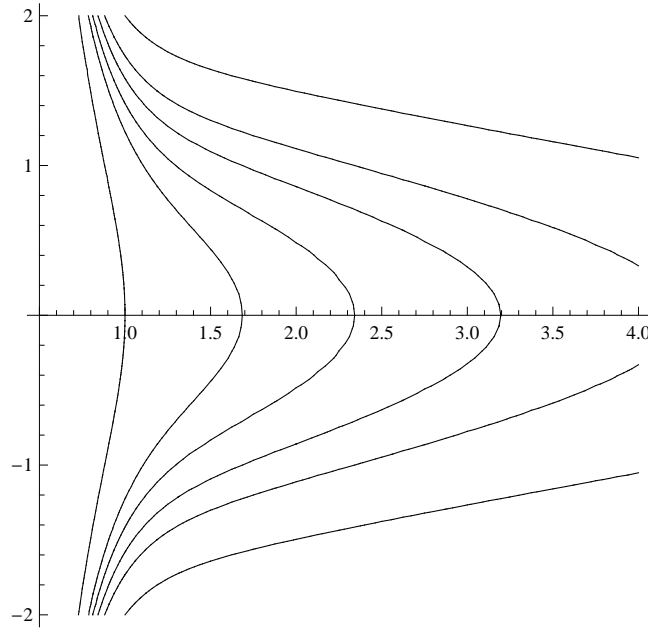


Figura 6: Grafico del piano  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $L < 2$

- per  $|L| < \alpha$  due punti di equilibrio in  $P_{\pm} = (\rho_{\pm}, 0)$  con  $\rho_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - L^2}$

Osserviamo inoltre che per  $|L| = \alpha$   $V'_{eff}$  è sempre negativa, perciò  $\rho = \alpha$  sarà un flesso, e perciò  $P_0$  instabile. Invece per  $|L| < \alpha$  abbiamo che  $V'_{eff} > 0$  per  $\rho_- < \rho < \rho_+$ , quindi  $\rho_-$  sarà un minimo mentre  $\rho_+$  un massimo e quindi  $P_-$  stabile e  $P_+$  instabile.

**2.3 Grafico potenziale efficace.** Osserviamo che indipendentemente dalla scelta dei parametri

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty$$

Quindi

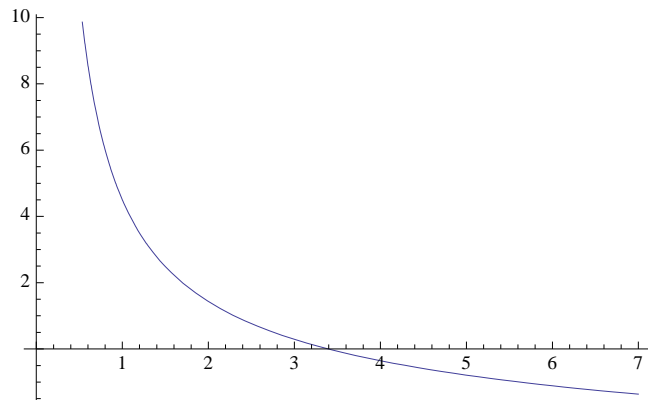


Figura 7: Grafico di  $V_{eff}$  per  $\alpha \leq 0$  oppure per  $|L| > \alpha$

**2.4 Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V_{eff}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ . Suddividiamo il problema in tre casi.

**Caso 1.**  $\alpha \leq 0$  oppure  $|L| > \alpha$ . Per ogni valore di  $E$  avremo una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$



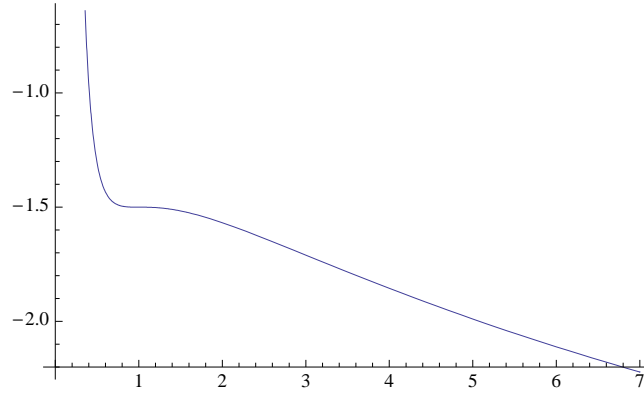


Figura 8: Grafico di  $V_{eff}$  per  $|L| = \alpha$

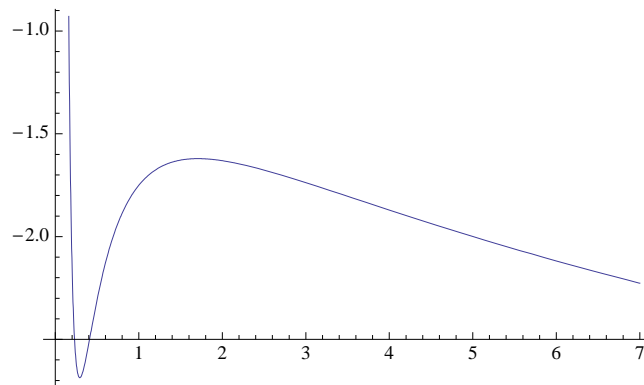


Figura 9: Grafico di  $V_{eff}$  per  $|L| < \alpha$

**Caso 2.**  $|L| = \alpha$ . Per  $E < V_{eff}(\alpha)$  abbiamo traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ . Per  $E = V_{eff}(\alpha)$  abbiamo traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$  e  $\lim_{\rho \rightarrow \alpha} y(\rho) = 0$  con tangente orizzontale.

Per  $E > V_{eff}(\alpha)$  abbiamo traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .

**Caso 3.**  $|L| < \alpha$ . Per  $E < V_{eff}(\rho_-)$  abbiamo traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ . Per  $E = V_{eff}(\rho_-)$  abbiamo traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$  e il punto stabile  $P_-$ .

Per  $V_{eff}(\rho_-) < E < V_{eff}(\rho_+)$  abbiamo traiettorie periodiche intorno al punto  $P_-$  e traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ . Per  $E = V_{eff}(\rho_+)$  una traiettorie omoclina con  $\lim_{\rho \rightarrow \rho_+} y(\rho) = 0$  e una traiettoria aperta tale che  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ . Per  $E > V_{eff}(\rho_+)$  avremo traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .

**2.5 Traiettorie periodiche.** Per quanto visto nel punto precedente avremo traiettorie periodiche solo nel caso  $|L| < \alpha$  per dati iniziali  $\rho_- < \rho < \rho_+$  e per valori dell'energia  $V_{eff}(\rho_-) < E < V_{eff}(\rho_+)$ .

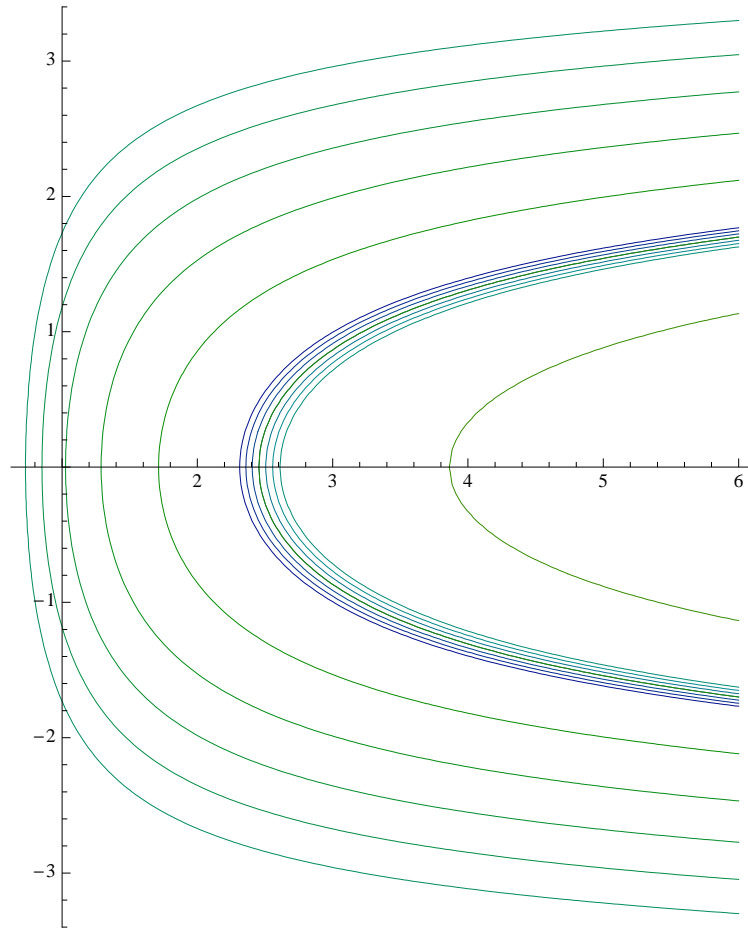


Figura 10: Piano delle fasi per  $\alpha \leq 0$  oppure per  $|L| > \alpha$

### ESERCIZIO 3.

1. Posto  $y = \dot{x}$ , otteniamo le equazioni del sistema dinamico associato, ovvero

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV}{dx} = -12 \cos x \sin^2 x - 6 \cos x \sin x \end{cases}$$

2. I punti di equilibrio del sistema sono tutti e soli quelli della forma  $(x_0, 0)$ , con  $x_0$  punto critico di  $V(x)$ : essendo  $V'(x) = 12 \cos x \sin^2 x +$

$$+6 \cos x \sin x = 6 \cos x \sin x (2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = 0 \vee$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \text{ otteniamo i sei punti di equilibrio } (0, 0), (\pi, 0), \left(\pm \frac{\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) \text{ e } \left(-\frac{5}{6}\pi, 0\right).$$

Per discutere la stabilità dei punti di equilibrio trovati, calcoliamo la derivata seconda del potenziale:  $V''(x) = -12 \sin^3 x - 6 \sin^2 x +$

$$+24 \cos^2 x \sin x + 6 \cos^2 x, \text{ dunque}$$

$$V''(0) = V''(\pi) = V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 6 > 0 \text{ e } V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -18, V''\left(-\frac{\pi}{6}\right) = V''\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{9}{2} < 0,$$

dunque i punti  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  e  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  sono stabili, mentre  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$  e  $\left(-\frac{5}{6}\pi, 0\right)$  sono instabili.

3. In base allo studio delle derivate prima e seconda del potenziale possiamo tracciare il grafico dell'energia potenziale come in figura:

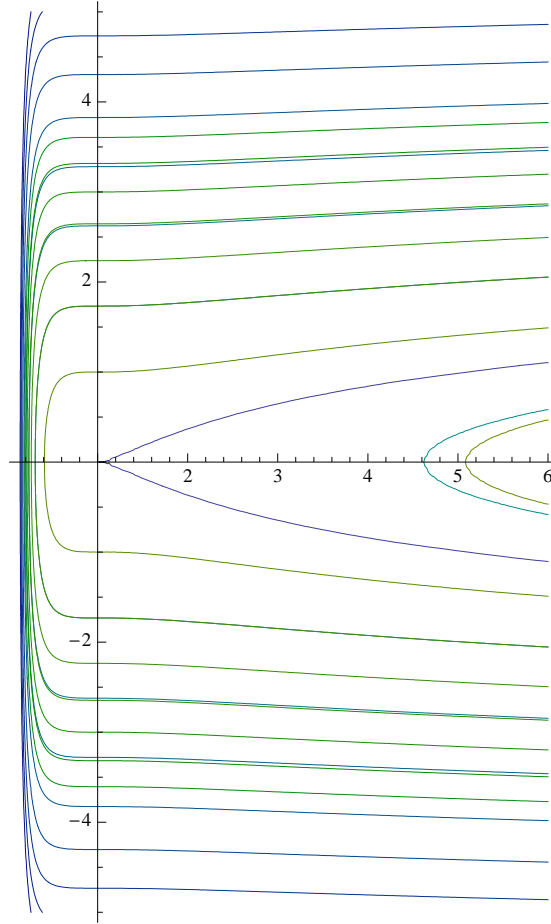


Figura 11: Piano delle fasi per  $|L| = \alpha$

4. Come sempre il moto avviene lungo curve di livello  $\frac{y^2}{2} + V(x) = E$ . Per  $E = V\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$  l'unica traiettoria è costituita dal punto di equilibrio stabile  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , mentre per  $-1 < E < E(0) = E(\pi) = 0$  otteniamo una traiettoria periodica che ruota intorno al suddetto punto di equilibrio; la curva di livello corrispondente a  $E$  è formata da una traiettoria periodica e dai due punti di equilibrio  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ , mentre per  $0 < E < V\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = V\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$  ci sono tre traiettorie periodiche; la curva di livello corrispondente ai due punti instabili  $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$  e  $\left(-\frac{5}{6}\pi, 0\right)$  contiene, oltre ai due p.d.e., altre quattro traiettorie: due omocline tendenti per  $t \rightarrow \pm\infty$  ognuna a uno di quei due punti, e due eterocline, tendenti a un p.d.e. nel passato e all'altro nel futuro; per  $\frac{1}{4} < E < V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7$  otteniamo una sola curva chiusa, per  $E = 7$  due traiettorie omocline tendenti al punto  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  e infine per  $E > 7$  due curve chiuse (sono chiuse perché  $x \in \mathbb{T}$ ). La situazione è descritta dalla seguente figura:
5. Per quanto visto in precedenza, tutte le curve di livello sono chiuse, dunque tutte le traiettorie sono periodiche ad eccezione dei punti di equilibrio e di quelle giacenti sulle separatrici; in altre parole, l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche è dato da  $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : (x, y) \neq (0, 0), (\pi, 0), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \frac{1}{4} \neq \frac{y^2}{2} + V(x) \neq 7 \right\}$ .
6. Per quanto visto nello studio qualitativo del piano delle fasi, al valore di energia  $E = 0$

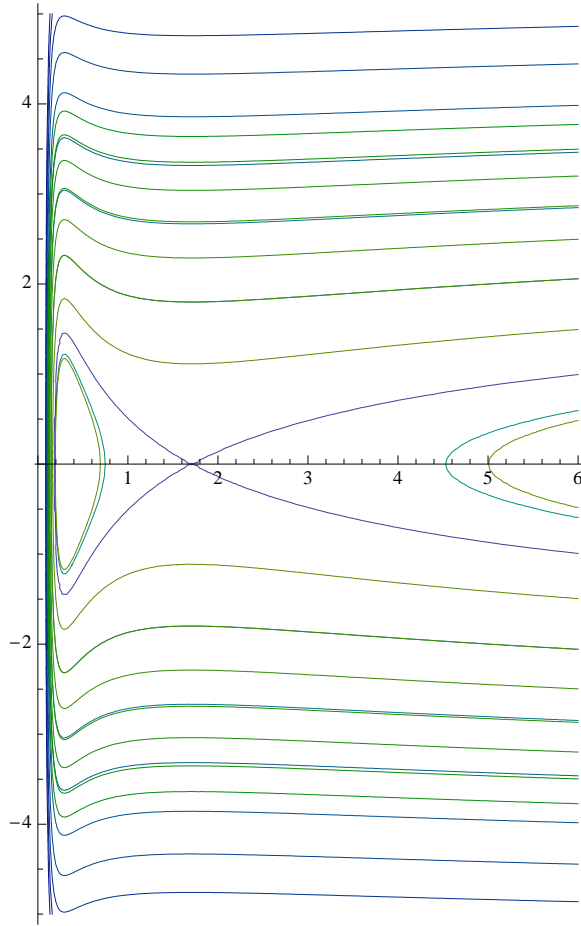


Figura 12: Piano delle fasi per  $|L| < \alpha$

corrispondono due p.d.e. stabili e una curva chiusa che, non essendo una separatrice, conterrà una traiettoria periodica; determiniamo i valori di  $x_{\pm}$  in cui questa curva interseca l'asse delle  $x$ :  $4 \sin^3 x + 3 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\frac{3}{4}$ : poiché dev'essere  $0 \neq x \neq \pi$ , perché questi due punti non appartengono alla traiettoria periodica, allora si avrà necessariamente  $x_- = -\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) =$

$= \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) - \pi$  e  $x_+ = \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ , e dunque possiamo scrivere il periodo come

$$T = \sqrt{2} \int_{\arcsin(\frac{3}{4}) - \pi}^{\arcsin(-\frac{3}{4})} \frac{dx}{\sqrt{-4 \sin^3 x - 3 \sin^2 x}}$$

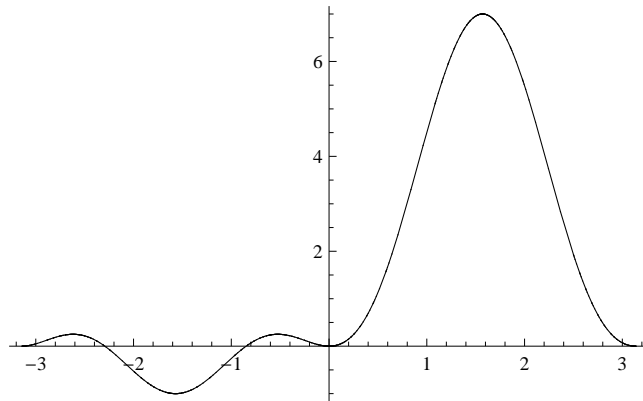


Figura 13: Grafico dell'energia potenziale  $V(x) = 4 \sin^3 x + 3 \sin^2 x$

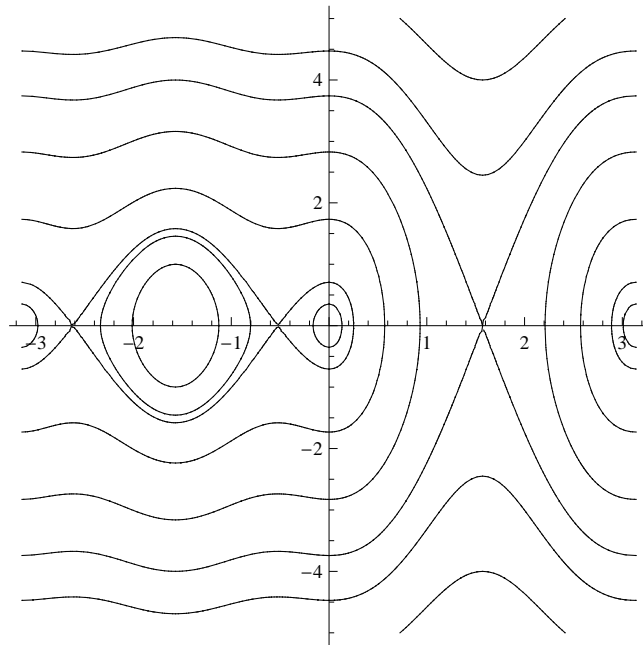


Figura 14: Grafico del piano  $(x, y) = (x, \dot{x})$

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO 10 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. Si consideri un punto materiali di massa  $m = 1$  soggetto ad una forza centrale di energia potenziale  $V(\rho) = \frac{\rho^2}{2} - 2 \log \rho - \frac{\alpha}{\rho^2}$ . Rispondere alle seguenti domande al variare del parametro  $\alpha \geq 0$ .

1. Essendo  $m = 1$ , le equazioni di Newton diventano  $\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} =$   
 $= -\rho + \frac{2}{\rho} - \frac{2\alpha}{\rho^3} + \frac{L^2}{\rho^3}$ , dunque le equazioni del sistema dinamico associato sono

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\rho + \frac{2}{\rho} - \frac{2\alpha}{\rho^3} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases} .$$

2. I punti di equilibrio del sistema sono tutti e soli quelli del tipo  $(\rho_0, 0)$ , con  $\rho_0$  punto critico del potenziale efficace; essendo  $V_{eff}(\rho) = \rho - \frac{2}{\rho} + \frac{2\alpha}{\rho^3} - \frac{L^2}{\rho^3} = \frac{\rho^4 - 2\rho^2 + 2\alpha - L^2}{\rho^3}$ , allora dovrà essere  $\rho_0 = \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + L^2 - 2\alpha}}$ ; se  $L^2 < 2\alpha - 1$  non ci sono soluzioni, mentre se  $L^2 > 2\alpha$  abbiamo una soluzione sola, perché  $1 - \sqrt{1 + L^2 - 2\alpha} \leq 0$ , mentre per  $2\alpha - 1 \leq L^2 \leq 2\alpha$  ne abbiamo due distinte  $\rho_+$  e  $\rho_-$ .

Per studiare la stabilità di questi punti, ricordiamo che il punto  $(\rho_0, 0)$  è stabile se  $\rho_0$  è un minimo isolato per  $V_{eff}(\rho)$ , mentre è instabile se  $\rho_0$  è un massimo o un flesso:

se  $L^2 = 2\alpha + 1$ ,  $V'_{eff}(\rho) = \frac{(\rho^2 - 1)^2}{\rho^3} \geq 0 \forall \rho \neq 1$ , dunque  $\rho_0 = 1$  è un punto di flesso e dunque il corrispondente punto di equilibrio è stabile; se invece  $L^2 > 2\alpha$ , notiamo che  $V''_{eff}(\rho) = 1 + \frac{2}{\rho^2} +$

$+\frac{3(L^2 - 2\alpha)}{\rho^4} > 0 \forall \rho$  e quindi in particolare per  $\rho = \rho_0$ , che dunque è un minimo e quindi l'unico p.d.e. è stabile; infine, quando  $2\alpha - 1 < L^2 \leq 2\alpha$ , abbiamo che

$$V'_{eff}(\rho) = \frac{(\rho^2 - \rho_-^2)(\rho^2 - \rho_+^2)}{\rho^3}, \text{ dunque } V'_{eff}(\rho) > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \rho \in (0, \rho_-) \cup (\rho_+, +\infty)$ ,  $V'_{eff}(\rho) < 0 \Leftrightarrow \rho \in (\rho_-, \rho_+)$ , che equivale a dire che  $\rho_-$  è un punto di massimo, e dunque instabile, mentre  $\rho_+$  è un minimo e cioè stabile.

3. Notiamo che  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty \forall L, \forall \alpha$ , mentre  $\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) =$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } L^2 > 2\alpha \\ -\infty & \text{se } L^2 \leq 2\alpha \end{cases}, \text{ dunque il grafico del potenziale efficace avrà la seguente forma:}$$

4. Dividiamo lo studio del piano  $(\rho, \dot{\rho})$  nei quattro casi, come per lo studio del potenziale efficace.

Se  $L^2 < 2\alpha - 1$ , otteniamo tutte traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow 0} y(\rho) = \pm\infty$ .

Anche per  $L^2 = 2\alpha - 1$  le traiettorie sono quasi tutte aperte e tali che  $\lim_{\rho \rightarrow 0} y(\rho) = \pm\infty$ , ad eccezione della curva contenente il punto di equilibrio: questa è composta, oltre che dal

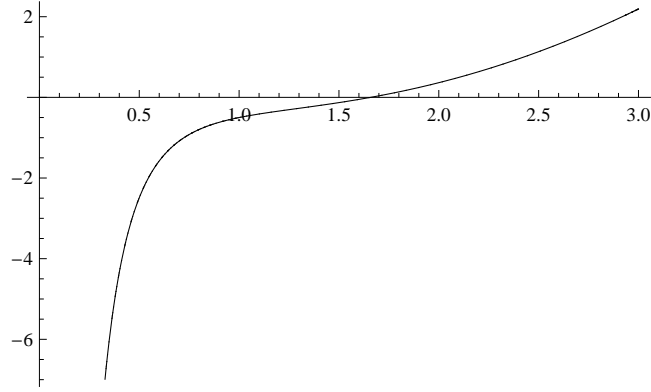


Figura 1: Grafico del potenziale efficace per  $L^2 < 2\alpha - 1$

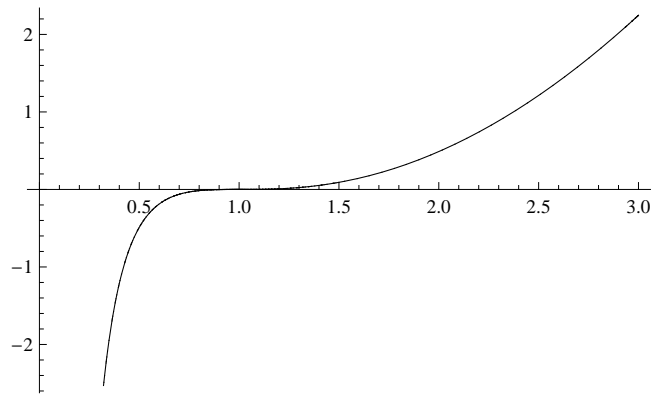


Figura 2: Grafico del potenziale efficace per  $L^2 = 2\alpha - 1$

punto  $(1, 0)$  da due curve aperte, tendenti al p.d.e. in una direzione e all'infinito nell'altra.

Studiamo ora il caso  $2\alpha - 1 < L^2 \leq 2\alpha$ : per valori di energia  $E < V_{eff}(\rho_+)$ , otteniamo curve aperte, mentre per  $E = V_{eff}(\rho_+)$  otteniamo, oltre alla curva aperta, anche quella costituita dal solo punto di equilibrio  $(\rho_+, 0)$ ; per  $V_{eff}(\rho_+) < E < V_{eff}(\rho_-)$  ogni curva è costituita da una traiettoria aperta e da una periodica e per  $E = V_{eff}(\rho_-)$  abbiamo quattro traiettorie: il punto di equilibrio instabile  $(\rho_-, 0)$ , una traiettoria omoclina tendente a quel punto per  $t \rightarrow \pm\infty$  e due curve aperte; infine, per  $E > V_{eff}(\rho_-)$ , otteniamo ancora curve aperte.

Consideriamo infine il caso  $L^2 > 2\alpha$ : in questo caso, ad eccezione del punto di equilibrio stabile  $(\rho_0, 0)$ , tutte le altre curve sono costituite da traiettorie periodiche.

5. Come si deduce dallo studio effettuato al punto precedente, esistono traiettorie periodiche solamente se  $L^2 > 2\alpha - 1$ : se  $2\alpha - 1 < L^2 \leq 2\alpha$ , le traiettorie periodiche sono tutte e sole quelle con valori di energia  $V_{eff}(\rho_+) < E < V_{eff}(\rho_-)$  e dato iniziale  $\rho_- < \rho < \rho_+$ ; se invece  $L^2 > 2\alpha$ , sono periodiche tutte le traiettorie diverse dal punto di equilibrio  $(\rho_0, 0)$ .

### ESERCIZIO 2. 2.1

Intanto  $V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2}$ . Quindi le equazioni di Newton sono

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} = -(2 - 4\alpha\rho^3 - \frac{L^2}{\rho^3}) = -\frac{2\rho^3 - 4\alpha\rho^6 - L^2}{\rho^3}$$

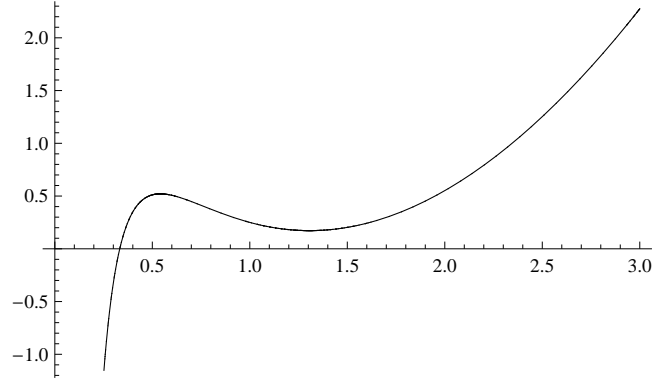


Figura 3: Grafico del potenziale efficace per  $2\alpha - 1 < L^2 \leq 2\alpha$

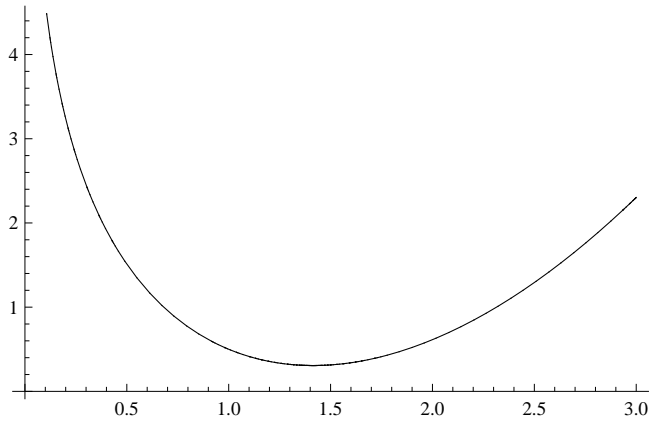


Figura 4: Grafico del potenziale efficace per  $L^2 > 2\alpha$

mentre il sistema dinamico associato è:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{2\rho^3 - 4\alpha\rho^6 - L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

**2.2 Punti di equilibrio e stabilità.** I punti di equilibrio del sistema sono quelli del tipo  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale. Quindi da  $V'_{eff}(\rho) = 0$  otteniamo

$$\rho = \left( \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha L^2}}{4\alpha} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Consideriamo il caso  $\alpha > 0$ , perciò abbiamo due soluzioni per  $L^2 < \frac{1}{4\alpha}$ , una per  $L^2 = \frac{1}{4\alpha}$  e nessuna soluzione per  $L^2 > \frac{1}{4\alpha}$ . Per  $\alpha = 0$  abbiamo  $V'_{eff}(\rho) = \frac{2\rho^3 - L^2}{\rho^3}$  e quindi avremo una soluzione per  $\rho = \left(\frac{L^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ . I punti stabili sono i punti  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  minimo per il potenziale. Notiamo che per  $\alpha = 0$  abbiamo un minimo in  $\rho = (L^2/2)^{1/3}$  quindi un punto stabile. Per  $\alpha > 0$  studiando il segno di  $V'_{eff}$  per  $L^2 < \frac{1}{4\alpha}$  abbiamo un massimo e un minimo, quindi un punto instabile e uno stabile, mentre per  $L^2 = \frac{1}{4\alpha}$  abbiamo un flesso e quindi instabile.

**2.3 Grafico potenziale.** Notiamo che per  $\alpha > 0$  indipendentemente dal valore dei parametri

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty$$



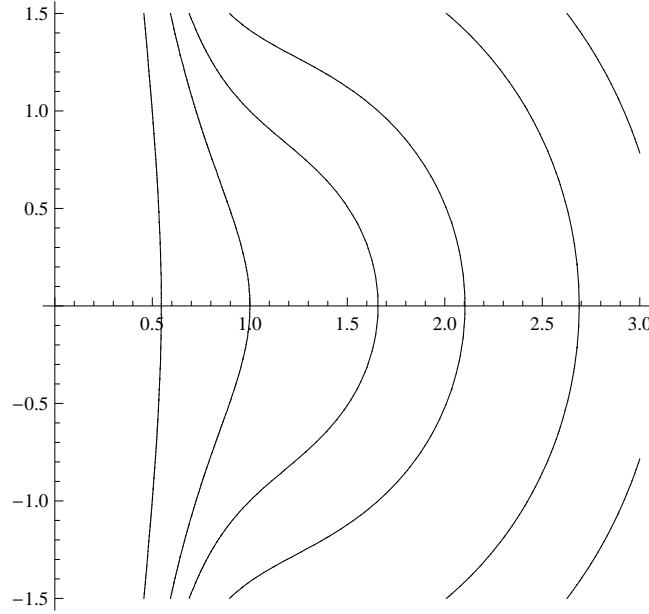


Figura 5: Grafico del piano  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $L^2 < 2\alpha - 1$

mentre per  $\alpha = 0$  abbiamo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

perciò, visto lo studio della derivata fatto al punto precedente abbiamo

**2.4 Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V_{eff}(\rho)$  abbiamo  $y = \pm\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}$ . Prima di tutto analizziamo il caso  $\alpha = 0$  e notiamo che si hanno solo traiettorie periodiche intorno al punto stabile. Analizziamo ora i casi  $\alpha > 0$

1.  $L^2 < \frac{1}{4\alpha}$  abbiamo i due punti  $\rho_{1,2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha L^2}}{4\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$ 
  - $E < V(\rho_2)$  avremo traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$
  - $V(\rho_2) < E < V(\rho_1)$  avremo traiettorie periodiche intorno al punto stabile  $(\rho_2, 0)$  e traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .
  - $E = V(\rho_1)$  avremo una traiettoria omoclina tendente al punto instabile  $(\rho_1, 0)$  e traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .
  - $E > V(\rho_1)$  avremo traiettorie aperte tali che  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .
2.  $L^2 = \frac{1}{4\alpha}$  abbiamo un punto  $\rho_0 = \left(\frac{1}{4\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$ 
  - $E < V(\rho_0)$  avremo traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$
  - $E = V(\rho_0)$  avremo traiettoria con una cuspidè in  $(\rho_0, 0)$  e con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .
  - $E > V(\rho_0)$  avremo traiettorie aperte tali che  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .
3.  $L^2 > \frac{1}{4\alpha}$  non abbiamo punti di equilibrio quindi avremo solo traiettorie tali che  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .

**2.5 Traiettorie periodiche.** Dal punto precedente notiamo che nel caso  $\alpha = 0$  abbiamo traiettorie periodiche sempre. Nel caso  $\alpha > 0$  le abbiamo se  $L^2 < \frac{1}{4\alpha}$  e per  $V(\rho_2) < E < V(\rho_1)$ .

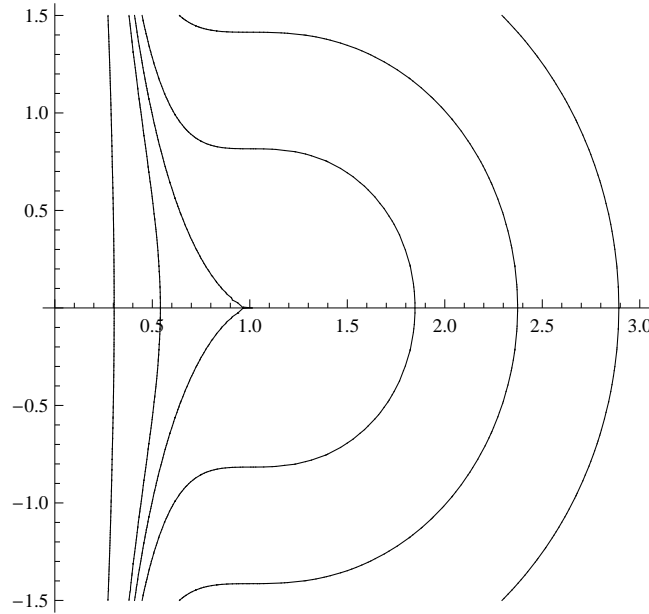


Figura 6: Grafico del piano  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $L^2 = 2\alpha - 1$

**ESERCIZIO 3. 3.1** Sapendo che  $m = 1$  e che

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho} = \log\left(\frac{3\rho^2 + 2}{2\rho}\right) + \frac{L^2}{2\rho}$$

le equazioni di Newton diventano

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} = -\frac{6\rho^4 - 2\rho^2(2 + 3L^2) - 4L^2}{2\rho^3(3\rho^2 + 2)}$$

e dunque le equazioni del sistema dinamico associato sono

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{6\rho^4 - 2\rho^2(2 + 3L^2) - 4L^2}{2\rho^3(3\rho^2 + 2)} \end{cases}$$

**3.2 Equilibrio e stabilità.** I punti di equilibrio sono del tipo  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico di  $V_{eff}$ . Perciò da  $V'_{eff}(\rho) = 0$  e ricordando che  $\rho$  è un raggio e perciò positivo, abbiamo

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{(2 + 3L^2) + \sqrt{(2 + 3L^2)^2 + 24L^2}}{6}}$$

che è un minimo. Perciò, ricordando che i punti del tipo  $(\rho_0, 0)$  sono stabili se e solo se  $\rho_0$  è un minimo per il potenziale, abbiamo un unico punto di equilibrio stabile.

**3.3 Grafico potenziale.** Abbiamo già studiato la derivata di  $V_{eff}$  perciò, visto che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

possiamo disegnare il grafico di  $V_{eff}$

**3.4 Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V_{eff}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}$ . Quindi per  $E = V_{eff}(\rho_0)$  abbiamo il solo punto di equilibrio, per  $E > V_{eff}(\rho_0)$  avremo traiettorie periodiche intorno al punto stabile.

**3.5 Traiettorie periodiche.** Dal punto precedente notiamo che per  $\rho > 0$  e per valori di  $E > V_{eff}(\rho_0)$  si hanno traiettorie periodiche.

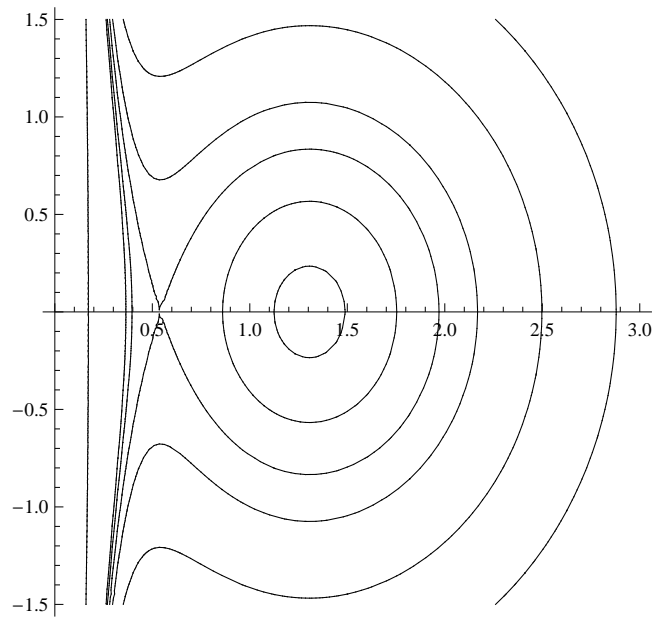


Figura 7: Grafico del piano  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $2\alpha - 1 < L^2 \leq 2\alpha$

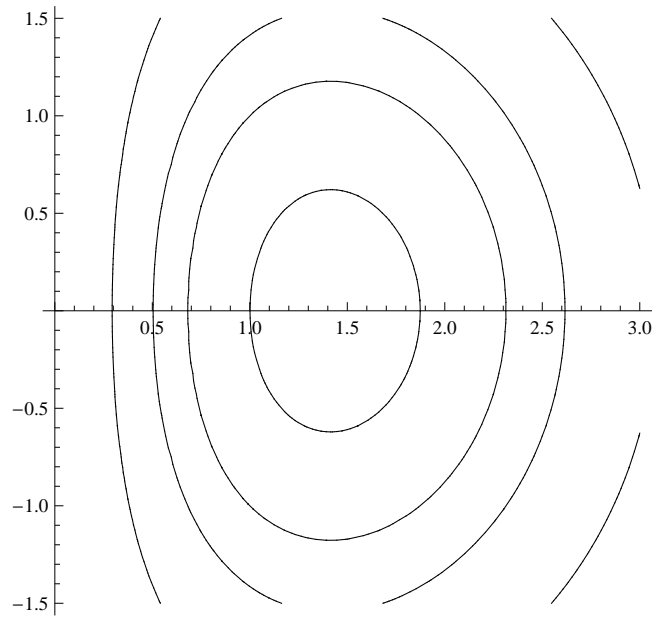


Figura 8: Grafico del piano  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $L^2 > 2\alpha$

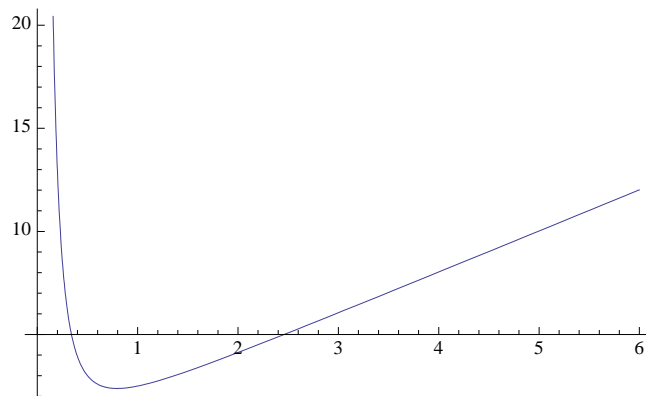


Figura 9: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\alpha = 0$  (es 2)

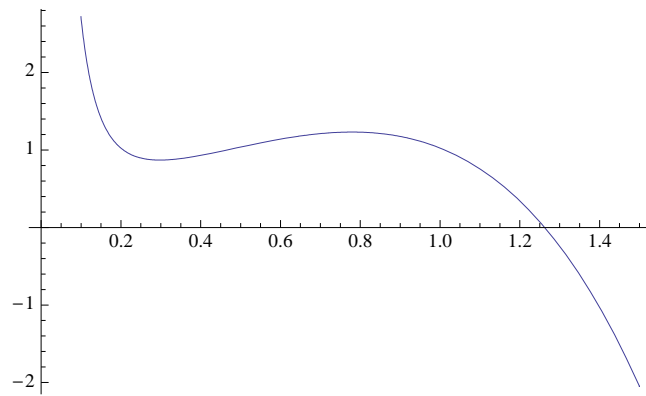


Figura 10: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\alpha > 0$  e per  $L^2 < \frac{1}{4\alpha}$  (es 2)

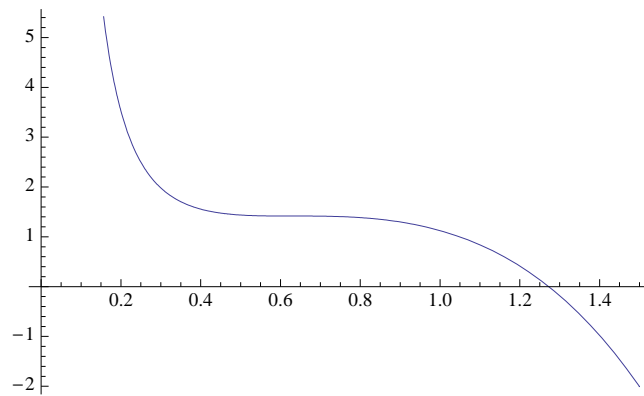


Figura 11: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\alpha > 0$  e per  $L^2 = \frac{1}{4\alpha}$  (es 2)

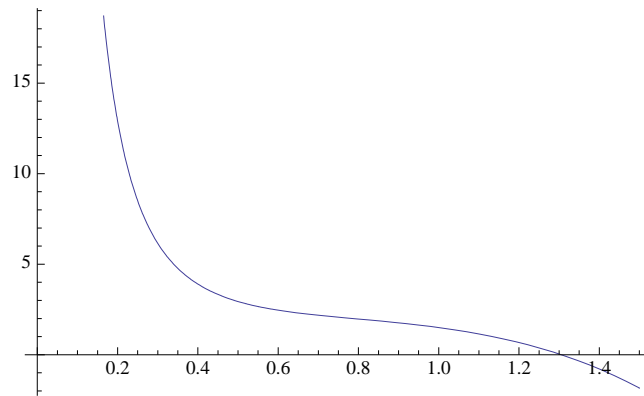


Figura 12: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\alpha > 0$  e per  $L^2 > \frac{1}{4\alpha}$  (es 2)

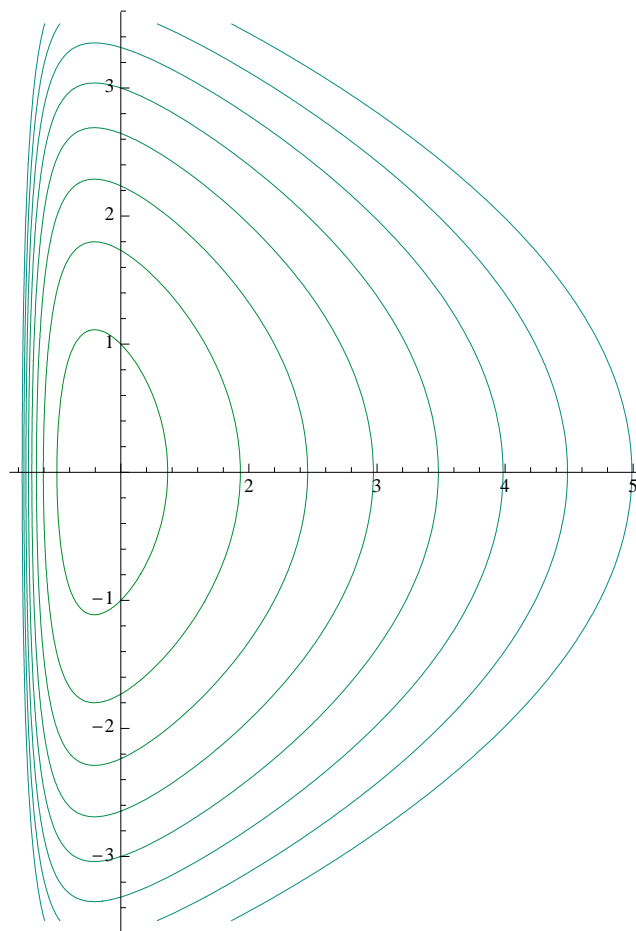


Figura 13: Piano delle fasi per  $\alpha = 0$  (es 2)

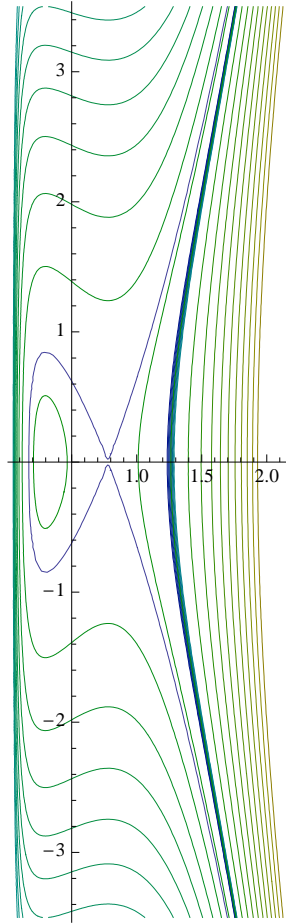


Figura 14: Piano delle fasi per  $\alpha > 0$  e  $L^2 < \frac{1}{4\alpha}$  (es 2)

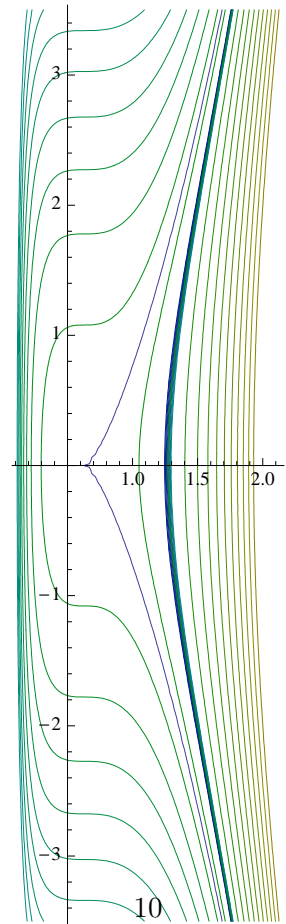


Figura 15: Piano delle fasi per  $\alpha > 0$  e  $L^2 = \frac{1}{4\alpha}$  (es 2)

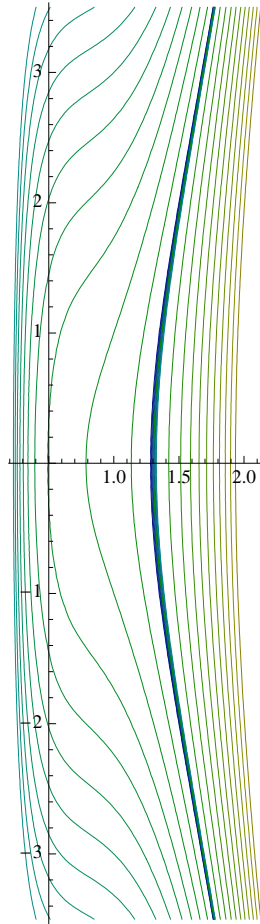


Figura 16: Piano delle fasi per  $\alpha > 0$  e  $L^2 > \frac{1}{4\alpha}$  (es 2)

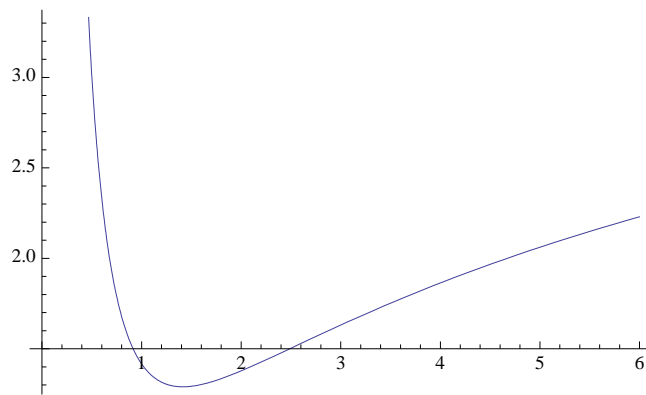


Figura 17: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  (es 3)



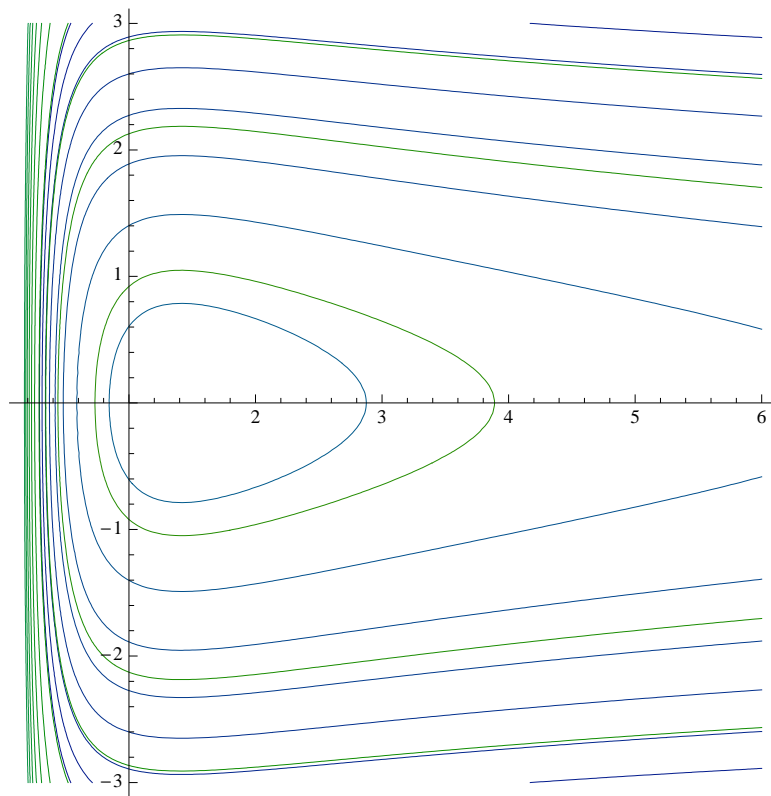


Figura 18: Piano delle fasi  $(\rho, \dot{\rho})$  (es 3)

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO 11 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

1. Il vettore che individua  $O'$  nel sistema fisso  $\kappa$  è  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, 0)$ , dunque la traslazione  $C$  è data da  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + (t, t^2, 0)$ , mentre la rotazione avviene attorno all'asse  $z$  e dunque è rappresentata dalla matrice  $B = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , con  $\theta(t) = \arctan\left(\frac{\dot{y}_{O'}(t)}{\dot{x}_{O'}(t)}\right) =$

$$= \arctan(2t); \text{ dunque, } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & -\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Poiché  $P$  si muove lungo l'asse  $\xi$ , il suo moto in  $K$  sarà  $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), 0, 0) = (e^t, 0, 0)$ ; per ottenere la legge del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema  $\kappa$  è sufficiente applicare la trasformazione  $D$ :

$$\mathbf{q}(t) = B\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & -\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{\sqrt{1+4t^2}} + t \\ \frac{2te^t}{1+4t^2} + t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Per ottenere velocità assoluta  $\mathbf{v}$  è sufficiente derivare il vettore

$$\mathbf{q}(t): \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}(t) = \left( e^t \left( \frac{1-4t+4t^2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + 1, e^t \left( \frac{2+2t+8t^3}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + 2t, 0 \right).$$

4. Essendo  $\dot{\mathbf{Q}} = (e^t, 0, 0)$ , la velocità relativa sarà  $\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & -\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ \frac{2te^t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} = (1, 2t, 0)$ .

6.  $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$ , ove  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\theta}(t)) = \left( 0, 0, \frac{2}{1+4t^2} \right)$ , dunque  $\mathbf{v}_T =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+4t^2} \\ \frac{e^t}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{2te^t}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{-4te^t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2e^t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0 \right).$$

7. La forza di Coriolis è data da

$$\mathbf{F}_2 = -2m [\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] = -2 [\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{Q}}],$$

perché  $\boldsymbol{\Omega} := B\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & -\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}$ , dunque

$$\mathbf{F}_2 = -2 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+4t^2} \\ e^t & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left( 0, \frac{4e^t}{1+t^2}, 0 \right).$$

Per determinare la forza centrifuga, notiamo che, essendo  $\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}}$ , sarà  $[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = [\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] =$

$$= -\frac{\mathbf{F}_2}{2} = \left( 0, -\frac{2}{1+t^2}, 0 \right), \text{ dunque } \mathbf{F}_3 = -m [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+4t^2} \\ 0 & -\frac{2}{1+t^2} & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{8e^t}{(1+t^2)^2}, 0, 0 \right).$$

**ESERCIZIO 2.** Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo) che all'istante  $t = 0$  coincide con  $\kappa$  e ruota attorno all'asse  $\zeta$ , parallelo a  $z$ , con velocità angolare costante  $\omega$ . L'origine  $O'$  si muove lungo l'asse  $z$  con legge oraria  $z_{O'}(t) = t$ . Un punto  $P$  di massa  $m = 1$  si muove nel sistema  $K$

secondo le equazioni 
$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\eta \\ \dot{\eta} = \xi \\ \dot{\zeta} = \alpha \\ (\xi(0), \eta(0), \zeta(0)) = (1, 0, 0) \end{cases}, \text{ dove } \alpha \text{ è un parametro reale.}$$

- Il vettore che individua  $O'$  nel sistema fisso  $\kappa$  è  $\mathbf{r}(t) = (0, 0, t)$ , dunque la traslazione  $C$  è data da  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + (0, 0, t)$ , mentre la rotazione avviene attorno all'asse  $z$  con velocità angolare costante e dunque è rappresentata dalla matrice  $B = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Nel sistema di riferimento  $K$ , le componenti di  $\mathbf{Q}(t)$  sono le soluzioni del sistema di equazioni 
$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\eta \\ \dot{\eta} = \xi \\ \dot{\zeta} = \alpha \\ (\xi(0), \eta(0), \zeta(0)) = (1, 0, 0) \end{cases} : \text{ per la terza componente, l'equazione } \begin{cases} \dot{\zeta} = \alpha \\ \zeta(0) = 0 \end{cases} \text{ è}$$

banale e ha per soluzioni  $\zeta(t) = \alpha t$ , mentre le prime due componenti risolvono 
$$\begin{cases} \dot{\gamma} = A\gamma \\ \gamma(0) = (1, 0) \end{cases},$$

ove  $\gamma = (\xi, \eta)$  e  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , dunque otterremo  $\gamma(t) = e^{At}\gamma(0) =$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}; \text{ riassumendo, abbiamo trovato che}$$

$\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (\cos t, \sin t, \alpha t)$ . Per ottenere la legge del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema  $\kappa$  è sufficiente applicare la trasformazione

$$D: \mathbf{q}(t) = B\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \alpha t \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \cos t - \sin(\omega t) \sin t \\ \sin(\omega t) \cos t + \cos(\omega t) \sin t \\ (\alpha + 1)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos((\omega + 1)t) \\ \sin((\omega + 1)t) \\ (\alpha + 1)t \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}(t) = (-(\omega + 1) \sin((\omega + 1)t), (\omega + 1) \cos((\omega + 1)t), \alpha + 1)$

- $\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \alpha \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \sin t - \sin(\omega t) \cos t \\ \cos(\omega t) \cos t - \sin(\omega t) \sin t \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin((\omega + 1)t) \\ \cos((\omega + 1)t) \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

5.  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} = (0, 0, 1)$

6.  $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$ , ove  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ , dunque  $\mathbf{v}_T =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \cos((\omega + 1)t) & \sin((\omega + 1)t) & \alpha t \end{vmatrix} = (-\omega \sin((\omega + 1)t), \omega \cos((\omega + 1)t), 0).$$

7. La forza di Coriolis è data da  $\mathbf{F}_2 = -2m [\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] = -2 [\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ , perché

$$\boldsymbol{\Omega} := B\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}, \text{ dunque}$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ -\sin t & \cos t & \alpha \end{vmatrix} = (2\omega \cos t, 2\omega \sin t, 0). \text{ Per calcolare la forza centrifuga, deter-}$$

miniamo innanzi tutto il valore di  $[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{Q}] =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \cos t & \sin t & \alpha \end{vmatrix} = (-\omega \sin t, \omega \cos t, 0); \text{ dunque, si avrà } \mathbf{F}_3 =$$

$$= -[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]] = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega \sin t & \omega \cos t & \alpha \end{vmatrix} = (\omega^2 \cos t, \omega^2 \sin t, 0).$$

8. Il moto del punto  $P$  nel sistema  $\kappa$  è descritto dalle coordinate  $\mathbf{q}(t) = (\cos((\omega + 1)t), \sin((\omega + 1)t), (\alpha + 1)t)$ : le prime due coordinate sono sempre periodiche, tranne per  $\omega = -1$ , valore per cui valgono costantemente  $-1$  e  $0$ ; la terza coordinata, invece, può esserlo solamente per  $\alpha = -1$ , altrimenti descrive un moto rettilineo uniforme; in conclusione, il moto è periodico per  $\omega \neq -1 = \alpha$ .

9. Il punto  $P$  risulta fermo nel sistema  $\kappa$  se e solo se la sua velocità  $\mathbf{v}$  nel sistema fisso  $\kappa$  è costantemente nulla; essendo  $\mathbf{v} = (-\omega - 1) \sin((\omega + 1)t), (\omega + 1) \cos((\omega + 1)t), \alpha + 1$ , l'unica coppia di valori per cui questo accadrà è  $\omega = \alpha = -1$ .

### ESERCIZIO 3.

(3.1) **Trasformazione rigida.** Cominciamo con l'osservare che il sistema dinamico planare che individua la curva  $\gamma(t)$  ammette una costante del moto data da

$$H(x, y) = y(y - x^2 + 1)$$

Inoltre la posizione iniziale di  $O'$  ci garantisce che  $\mathbf{q}_{O'}(t)$  è la curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = H(0, -1) = 0\}$$

che possiamo scrivere come  $\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  con

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\} \\ * \mathcal{C}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\} \end{aligned}$$

\*

Inoltre il moto di  $O'$  si svolgerà esclusivamente lungo la curva

$$C_2^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 < x < 1\}$$

perché il dato iniziale si trova in  $C_2^*$ .

Ma allora sostituendo  $y = x^2 - 1$  nella prima equazione del sistema, troviamo

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

e risolvendo per separazione di variabili avremo

$$\log \left| \frac{x(t) - 1}{x(t) + 1} \right| = 2t$$

ovvero, tenendo conto che  $|x| < 1$ ,

$$x(t) = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

e quindi troviamo che

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{q}_{O'}(t) = \left( \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}, \left( \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)^2 - 1, 0 \right)$$

La rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove  $\theta(t)$  è tale che  $\operatorname{tg} \theta(t) = \dot{y}_{O'}/\dot{x}_{O'}$  ma allora

$$\operatorname{tg} \theta(t) = \frac{2x(t)y(t)}{2y(t) - x^2(t) + 1} = \frac{2x(t)(x^2(t) - 1)}{x^2(t) - 1} = 2x(t) = 2 \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

e quindi

$$\theta(t) = \arctan \left( 2 \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)$$

**(3.2) Legge del moto nel sistema  $K$ .** Poiché  $P$  si muove esclusivamente lungo l'asse  $\xi$ , la legge del moto nel sistema relativo sarà della forma

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**(Modo 1).** Poiché il punto si muove sotto l'azione di un potenziale conservativo a energia nulla, possiamo scrivere la legge

$$\frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0$$

ovvero

$$\dot{\xi} = \pm \sqrt{-2V(\xi)}$$

dove il segno dipende dalla scelta della velocità iniziale. Risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$\int_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm \sqrt{2}t$$

ovvero

$$\xi(t) = \pm \sin \sqrt{2}t$$

**(Modo 2).** L'equazione del moto di  $P$  è data da

$$\ddot{\xi} = -\frac{dV}{dt} = -2\xi$$

la cui soluzione generale è

$$\xi(t) = c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Sostituendo il dato iniziale  $\xi(0) = 0$  troviamo che deve essere  $c_1 = 0$  e quindi  $\xi(t) = c_2 \sin \sqrt{2}t$ . Dalla legge di conservazione dell'energia inoltre, sappiamo che deve valere

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0$$

ovvero

$$c_2^2 \cos^2 \sqrt{2}t + c_2^2 \sin^2 \sqrt{2}t - 1 = 0$$

e quindi  $c_2 = \pm 1$  e il segno dipende dalla scelta della velocità iniziale, ovvero

$$\xi(t) = \pm \sin \sqrt{2}t$$

**Legge del moto in  $\kappa$ .** Per determinare la legge del moto nel sistema assoluto basterà applicare la trasformazione  $D$  a  $\mathbf{Q}(t)$ , ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= B \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O'}(t) \\ y_{O'}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ * &= \begin{pmatrix} \xi(t) \cos \theta(t) + x_{O'}(t) \\ \xi(t) \sin \theta(t) + y_{O'}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\*

(3.3) **Velocità assoluta.** Derivando il vettore  $\mathbf{q}(t)$  troviamo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \cos \theta(t) - \xi(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{x}_{O'}(t) \\ \dot{\xi}(t) \sin \theta(t) + \xi(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + \dot{y}_{O'}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove ovviamente

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \pm \sqrt{2} \cos \sqrt{2}t \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{(1 + e^{2t})^2}{3 - 2e^{2t} + 3e^{4t}} \\ * \dot{x}_{O'}(t) &= \left( \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)^2 - 1 \\ \dot{y}_{O'}(t) &= 2 \left( \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)^3 - 2 \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \end{aligned}$$

\*

**Velocità relativa.** Derivando il vettore che individua  $P$  in  $K$  troviamo  $\dot{\mathbf{Q}}(t) = (\dot{\xi}(t), 0, 0)$ , perciò la velocità relativa è

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \cos \theta(t) \\ \dot{\xi}(t) \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.4) **Componente traslatoria.** Da  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$  troviamo  $\mathbf{v}_0 = (\dot{x}_{O'}(t), \dot{y}_{O'}(t), 0)$ .

(3.5) **Componente rotatoria.** Poiché l'asse di rotazione del sistema mobile si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ , abbiamo  $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, \dot{\theta}(t))$ . Da ciò otteniamo quindi  $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-\dot{\theta}(t)\xi(t) \cos \theta(t), \dot{\theta}(t)\xi(t) \sin \theta(t), 0)$ .

(3.6) **Forza centrifuga.** Dall'esercizio 1 sappiamo che la forza centrifuga è proporzionale al vettore che individua  $P$  nel piano  $O\xi\eta$  e più precisamente  $F_{cf} = \dot{\theta}^2(t)\mathbf{Q}(t)$ .

**Forza di Coriolis.** Da  $F_{cor} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$  unitamente al fatto che, poiché l'asse di rotazione di  $K$  si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ , si ha  $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)$ , otteniamo  $F_{cor} = (0, -2\dot{\theta}(t)\dot{\xi}(t), 0)$ .

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**  
TUTORATO 12 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale  $V(x) = x^n$ .

Al variare del parametro  $n \in \mathbb{N}$ , si risponde alle seguenti domande:

1. Per  $n = 1$  otteniamo  $V(x) = x$ , e dunque il grafico del potenziale è semplicemente la bisettrice del primo e terzo quadrante.  
Per  $n$  pari, si ha che  $V(x) = x^n \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$ , e inoltre  $V(x) \geq 0 \forall x$ ; infine,  $V'(x) = nx^{n-1} - 1$ ,

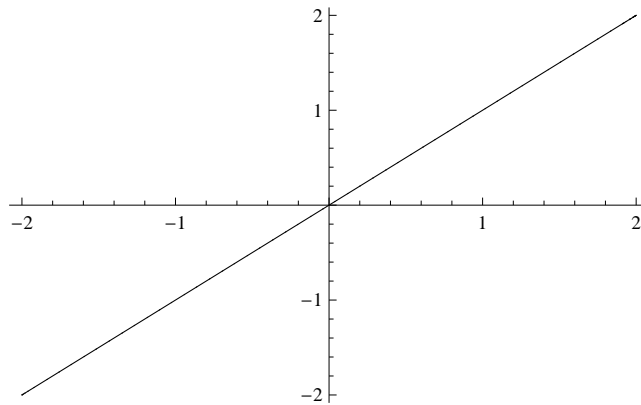


Figura 1: Grafico della funzione  $V(x)$  per  $n = 0$

dunque l'unico punto critico della funzione è l'origine, che è un minimo perché  $V(0) = 0$ .

Per  $n$  dispari,  $V(x) = x^n \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$ , mentre l'unico punto stazionario  $x = 0$  è un flesso

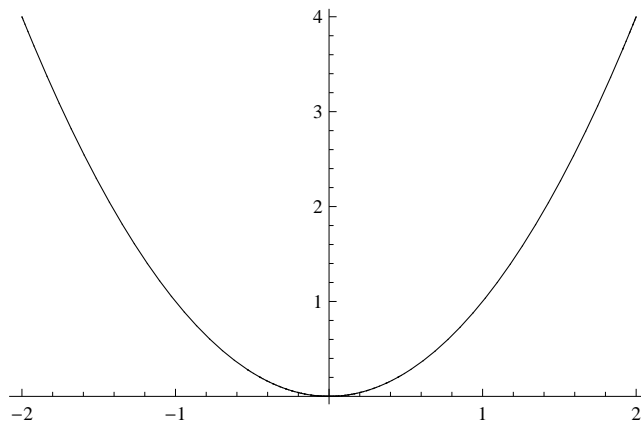


Figura 2: Grafico della funzione  $V(x)$  per  $n$  pari

perché  $V(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$  e  $V(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ .



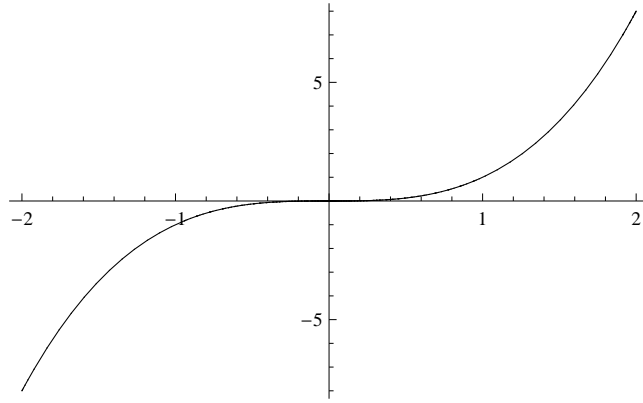


Figura 3: Grafico della funzione  $V(x)$  per  $n$  dispari

2. Come visto in precedenza,  $V'(x) = nx^{n-1}$ , dunque per  $n = 1$  non vi sono punti critici, mentre per tutti gli altri valori di  $n$  l'unico p.d.e. è l'origine.
3. Come visto in precedenza, per  $n$  pari l'origine è un punto di minimo, perché  $V(x) > V(0) = 0 \forall x \neq 0$ , mentre se  $n$  è dispari è un flesso, perché in questo caso il potenziale ha lo stesso segno di  $x$ ; dunque, nel primo caso l'origine è stabile e nel secondo è instabile
4. Per  $n = 1$  le curve sono del tipo  $\frac{y^2}{2} + x = E$ , e dunque sono parabole con asse orizzontale rivolte verso sinistra; in particolare, sono curve aperte e tali che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) \rightarrow \pm\infty$ .

Per  $n$  pari, per  $E = 0$  otteniamo solo il punto di equilibrio, mentre per ogni altro valore

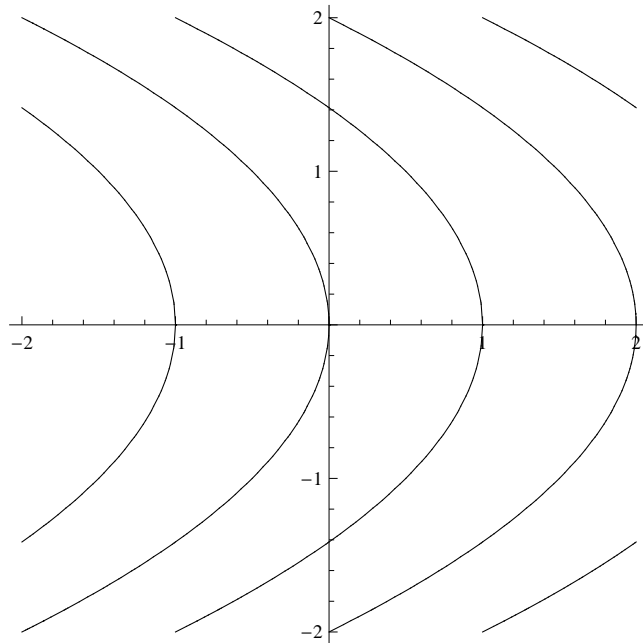


Figura 4: Grafico delle traiettorie per  $n = 0$

di  $E > 0$  otteniamo una curva chiusa.

Per  $n$  dispari, al valore di energia  $E = 0$  troviamo tre traiettorie: il punto di equilibrio e due traiettorie aperte simmetriche rispetto all'asse orizzontale, la prima tendente all'origine per  $t \rightarrow +\infty$  e l'altra per  $t \rightarrow -\infty$ ; per ogni altro valore di energia, la curva di livello

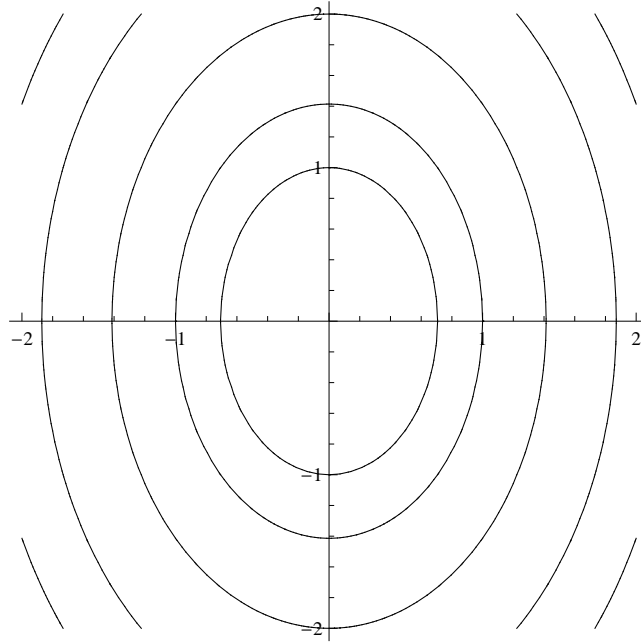


Figura 5: Grafico delle traiettorie per  $n$  pari

corrispondente è costituita da un'unica traiettoria aperta.

5. Per quanto visto in precedenza, se  $n$  è pari tutte le traiettorie avvengono su orbite chiuse e quindi, ad eccezione della curva corrispondente a  $E = 0$  che contiene solo l'origine, tutte le orbite sono periodiche; se invece  $n$  è dispari, tutte le curve di livello sono aperte e dunque le traiettorie non sono periodiche.

Nel primo caso, il periodo è dato da  $\sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$ , dove  $x_-$  e  $x_+$  sono i valori in cui le curve di livello intersecano l'asse delle  $x$ , cioè tali che  $V(x) = E$ ; essendo  $V(x) = x^n$ , otteniamo  $x_{\pm} = \pm \sqrt[n]{E}$ , e quindi  $T = \sqrt{2} \int_{-\sqrt[n]{E}}^{\sqrt[n]{E}} \frac{dx}{\sqrt{E - x^n}}$ .

6. Notiamo innanzi tutto che  $T = \sqrt{2} \int_{-\sqrt[n]{E}}^{\sqrt[n]{E}} \frac{dx}{\sqrt{E - x^n}} = 2\sqrt{2} \int_0^{\sqrt[n]{E}} \frac{dx}{\sqrt{E - x^n}} =$   
 $= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{E}} \int_0^{\sqrt[n]{E}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^n}{E}}}$ ; con il cambio di variabile  $y = \frac{x}{\sqrt[n]{E}}$  otteniamo che  
 $T = \frac{2\sqrt{2} \sqrt[n]{E}}{\sqrt{E}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^n}} = c_n E^{\frac{2-n}{2n}}$ , ove  $c_n = 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}}$ .

7. Notiamo che la dipendenza di  $T$  da  $E$  compare solamente nel fattore  $E^{\frac{2-n}{2n}}$ , che è costante se e solo se l'esponente è nullo, cioè per  $n = 2$ : per questo valore, il periodo vale

$$2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \stackrel{y=\sin t}{=} 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t} dt =$$

$$= \sqrt{2}\pi.$$

**ESERCIZIO 2. (2.1) Trasformazione rigida.** Cerchiamo intanto la legge del moto di  $O'$ . Per individuare la curva lungo cui si muove  $O'$  notiamo che le sue componenti sono soluzione del

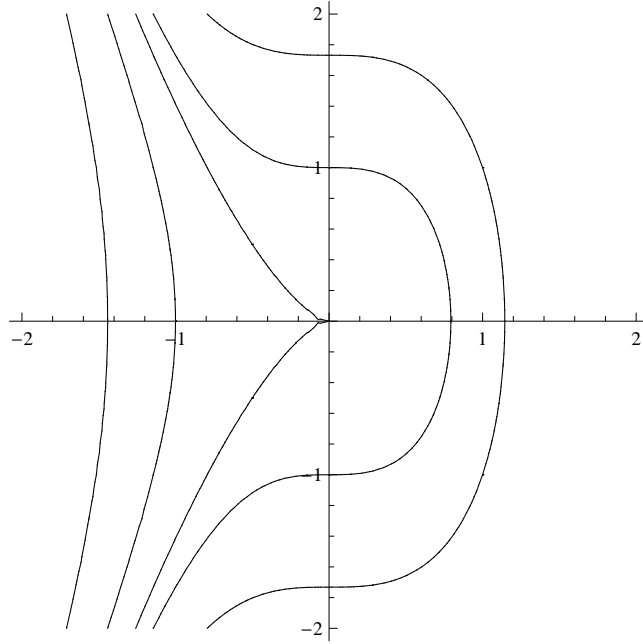


Figura 6: Grafico delle traiettorie per  $n$  pari

problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az \\ z(0) = (1, 0) \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e tale sistema, come sappiamo ha per soluzione

$$z(t) = \exp(At)z(0) \quad \exp(At) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 2t & -e^{2t} \sin 2t \\ e^{2t} \sin 2t & e^{2t} \cos 2t \end{pmatrix}$$

e quindi  $\gamma(t) = (e^{2t} \cos 2t, e^{2t} \sin 2t, 0)$  se vista come curva immersa in  $\mathbb{R}^3$ . L'angolo di rotazione è dato da

$$\operatorname{tg} \theta(t) = \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1} = \frac{\cos 2t + \sin 2t}{\cos 2t - \sin 2t}$$

e quindi

$$\theta(t) = \arctan \left( \frac{\cos 2t + \sin 2t}{\cos 2t - \sin 2t} \right)$$

Pertanto possiamo scrivere la trasformazione rigida come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 2t \\ e^{2t} \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.2) **Legge del moto in  $K$ .** Poichè  $P$  si muove lungo l'asse  $\xi$ , la legge del moto in  $K$  sarà del tipo  $\mathbf{Q} = (\xi(t), 0, 0)$  con  $\xi(t)$  che verifica l'equazione  $\ddot{\xi} + \lambda \xi = 0$  e quindi  $\xi(t) = \xi_0 \cos \sqrt{\lambda} t + \dot{\xi}_0 \sin \sqrt{\lambda} t$  dove  $\xi_0$  è la coordinata lungo l'asse  $\xi$  della posizione iniziale di  $P$  e  $\dot{\xi}_0$  è la sua velocità iniziale. Indichiamo  $\alpha = \sqrt{\lambda}$ .

**Legge del moto in  $k$ .** Per determinare la legge del moto nel sistema assoluto basterà applicare la trasformazione  $D$  a  $\mathbf{Q}(t)$ . Pertanto vale

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= B \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 2t \\ e^{2t} \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi(t) \cos \theta(t) \\ \xi(t) \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 2t \\ e^{2t} \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi(t) \cos \theta(t) + e^{2t} \cos 2t \\ \xi(t) \sin \theta(t) + e^{2t} \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1)$$

(2.3) **Velocità assoluta.** Derivando il vettore  $\mathbf{q}(t)$  troviamo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \cos \theta(t) - \xi(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + e^{2t}(2 \cos 2t - 2 \sin 2t) \\ \dot{\xi}(t) \sin \theta(t) + \xi(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + e^{2t}(2 \sin 2t + 2 \cos 2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_0 \alpha \cos \alpha t - \xi_0 \alpha \sin \alpha t$

**Velocità relativa** Derivando il vettore che individua  $P$  nel sistema  $K$  troviamo  $\dot{\mathbf{Q}} = (\dot{\xi}(t), 0, 0)$  perciò la velocità relativa è

$$\mathbf{v}' = B \dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \cos \theta(t) \\ \dot{\xi}(t) \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2.4) **Componente traslatoria.** Da  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$  troviamo  $\mathbf{v}_0 = (e^{2t}(2 \cos 2t - 2 \sin 2t), e^{2t}(2 \sin 2t + 2 \cos 2t), 0)$ .

(2.5) **Componente rotatoria.** Poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse  $z$  di  $k$ , abbiamo  $\omega(t) = (0, 0, \dot{\theta}(t))$ . Da ciò otteniamo quindi  $\mathbf{v}_T = [\omega, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-\dot{\theta}(t)\xi(t) \sin \theta(t), \dot{\theta}(t)\xi(t) \cos \theta(t), 0)$ .

(2.6) **Forza centrifuga.** Sappiamo che  $F_{cf} = -[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$  dove  $\boldsymbol{\Omega} = B\omega$  e quindi, nel nostro caso avremo  $\boldsymbol{\Omega}(t) = \omega(t)$ . Perciò otteniamo  $F_{cf} = (\dot{\theta}^2(t)\xi(t), 0, 0)$

(2.7) **Forza di Coriolis.** Da  $F_{cor} = -2[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$  troviamo  $F_{cor} = (0, -2\dot{\xi}(t)\dot{\theta}(t), 0)$ .

**ESERCIZIO 3.3.1 Equazione del moto e sistema dinamico associato.** Si ha

$$\begin{aligned}V_{eff}(\rho) &= V(\rho) + \frac{L^2}{\mu\rho^2} = \frac{\rho^4}{4} - \frac{\alpha}{8\rho^8} + \frac{\beta}{2\rho^2}, \\ V'_{eff}(\rho) &= \rho^3 + \frac{\alpha}{\rho^9} - \frac{\beta}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^9}(\rho^{12} - \beta\rho^6 + \alpha), \\ V''_{eff}(\rho) &= 3\rho^2 - \frac{9\alpha}{\rho^{10}} + \frac{3\beta}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^{10}}(\rho^{12} + \beta\rho^6 - 3\alpha)\end{aligned}$$

dove  $\beta = \frac{L^2}{\mu} \in \mathbb{R}_+$ .

L'equazione del moto per la variabile radiale è allora

$$\mu\ddot{\rho} = -V'_{eff} = -\frac{1}{\rho^9}(\rho^{12} - \beta\rho^6 + \alpha)$$

e il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{\mu}V'_{eff} \end{cases}$$

**3.2 Punti di equilibrio.** I punti di equilibrio sono della forma  $(\rho, y) = (\rho_0, 0)$  con  $V'_{eff}(\rho_0) = 0$ . Consideriamo prima il caso  $\beta > 0$ . La funzione  $V_{eff}(\rho)$  è definita per  $\rho > 0$ , e si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) = \begin{cases} -\infty & \alpha > 0, \\ +\infty & \alpha \leq 0, \end{cases} \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{eff}(\rho) = +\infty,$$

poichè per  $\rho \rightarrow 0$  il termine dominante, per  $\alpha \neq 0$ , è  $-\alpha/8\rho^2$ , che diverge a  $-\infty$  se  $\alpha > 0$  e a  $+\infty$  se  $\alpha < 0$  e per  $\alpha = 0$  è  $\beta/2\rho^2$  che va a  $+\infty$ .

Si ha inoltre  $V'_{eff}(\rho) = 0$  per

$$\rho^{12} - \beta\rho^6 + \alpha = 0$$

che è un'equazione di secondo grado in  $x = \rho^6$ .

Le radici dell'equazione  $x^2 - \beta x + \alpha = 0$  sono

$$x_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2}$$

così che non ci sono radici reali per  $\alpha > \beta^2/4$ . Se invece  $\alpha = \beta^2/4$  si ha una sola radice  $\beta/2$ . Se  $0 < \alpha < \beta^2/4$  si ha  $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha} < \beta$  e quindi si hanno due radici positive distinte. Se  $\alpha = 0$  si ha una radice nulla e una positiva. Se infine  $\alpha < 0$  una radice è negativa e una positiva. Poichè  $x = \rho^6 > 0$  per  $\rho > 0$  solo le radici strettamente positive devono essere considerate. In conclusione non ci sono punti di equilibrio per  $\alpha > \beta^2/4$ , si ha un unico punto di equilibrio  $\rho_0 = (\beta/2)^{1/6}$  per  $\alpha = \beta^2/4$ , si hanno due punti d'equilibrio distinti

$$\rho_1 = \left( \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2} \right)^{1/6}, \quad \rho_2 = \left( \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2} \right)^{1/6}$$

per  $0 < \alpha < \beta^2/4$ , e di nuovo un solo punto d'equilibrio

$$\rho_0 = \left( \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2} \right)^{1/6}$$

per  $\alpha \leq 0$  (che diventa  $\rho_0 = \beta^{1/6}$  per  $\alpha = 0$ ). Se infine  $\beta = 0$  l'equazione si riduce a  $x^2 + \alpha = 0$ , che non ammette radici reali per  $\alpha > 0$ , mentre ammette una sola radice  $x = 0$  per  $\alpha = 0$  e due radici reali distinte  $x = \pm(-\alpha)^{1/2}$ , di cui solo una positiva  $x = (-\alpha)^{1/2}$ , per  $\alpha < 0$ .

Per  $\beta = 0$  (i.e.  $L=0$ ) il moto si svolge lungo una retta, quindi  $\rho$  si deve considerare su tutto  $\mathbb{R}$ . Non si hanno quindi punti di equilibrio per  $\alpha > 0$ , si ha un unico punto d'equilibrio  $\rho_0 = 0$  per  $\alpha = 0$  e si hanno due punti di equilibrio distinti

$$\rho_0 = \pm(-\alpha)^{1/12}$$

per  $\alpha < 0$ . Si noti che per  $\beta = 0$  l'energia potenziale efficace  $V_{eff}(\rho)$  è definita e pari in tutto  $\mathbb{R}$ .

**3.3 Stabilità dei punti di equilibrio.** Per  $\beta > 0$  e  $\alpha = \beta^2/4$  il punto stazionario  $(\beta/2)^{1/6}$  è un punto di flesso orizzontale (infatti per  $\alpha = \beta^2/4$  si ha  $V''_{eff}((\beta/2)^{1/6}) = 0$ ), e quindi per tali valori di  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $(\rho_0, 0)$  è un punto di equilibrio instabile per il sistema dinamico associato.

Per  $\beta > 0$  e  $0 < \alpha < \beta^2/4$  il punto stazionario  $\rho_1$  è un massimo e il punto  $\rho_2$  è un punto di minimo per l'energia potenziale efficace.

Per  $\alpha \leq 0$  il punto  $\rho_0$  è un punto di minimo per l'energia potenziale efficace  $V_{eff}(\rho)$ .

Possiamo quindi concludere che per  $\beta > 0$  e  $\alpha \in (0, \beta^2/4)$  il punto  $(\rho_2, 0)$  è un punto stabile per il sistema dinamico associato (per il teorema di Dirichlet), mentre il punto  $(\rho_1, 0)$  è un punto instabile.

Per  $\beta > 0$  e  $\alpha \leq 0$  il punto  $(\rho_0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico associato di nuovo per il teorema di Dirichlet.

Infine se  $\beta = 0 = \alpha$  il punto  $\rho_0 = 0$  è un punto di equilibrio stabile. e se  $\beta = 0$  e  $\alpha < 0$  i punti  $(\pm(-\alpha)^{1/12}, 0)$  sono stabili: di nuovo la stabilità segue dal teorema di Dirichlet.

**3.4 Grafico dell'energia potenziale efficace.** Si ha  $V_{eff}''(\rho) = 0$  per  $x = \rho^6$  tale che  $x^2 + \beta x - 3\alpha = 0$  quindi per

$$\bar{x}_{\pm} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 12\alpha}}{2}$$

quindi per avere zeri positivi di  $V_{eff}''(\rho)$  si deve avere  $\alpha \geq 0$ . In tal caso la funzione  $V_{eff}(\rho)$  cambia concavità per  $\rho = \bar{\rho}$  con

$$\bar{\rho} = \left( \frac{\sqrt{\beta^2 + 12\alpha} - \beta}{2} \right)^{1/6}$$

ovvero  $V_{eff}(\rho)$  è concava per  $\rho < \bar{\rho}$  e convessa per  $\rho > \bar{\rho}$ .

Per  $\beta > 0$  e  $\alpha \geq \beta^2/4$  si ha  $V_{eff}' > 0$  quindi la funzione  $V_{eff}(\rho)$  è strettamente crescente ed è concava per  $\rho < \bar{\rho}$  e convessa per  $\rho > \bar{\rho}$ . Per  $\alpha = \beta^2/4$  si ha  $\rho_0 = \bar{\rho} = \beta/2$ . Per  $\beta > 0$  e  $0 < \alpha < \beta^2/4$  la funzione  $V_{eff}(\rho)$  ha un punto di massimo relativo in  $\rho = \rho_1$  e un punto di minimo relativo in  $\rho = \rho_2$ . La funzione cambia concavità una volta sola, poichè  $V_{eff}''(\rho)$  ha un unico zero con  $\rho_1 < \bar{\rho} < \rho_2$ . Si noti che per  $\alpha \rightarrow \beta^2/4$  si ha  $\rho_1, \rho_2 \rightarrow \bar{\rho}$ . Per  $\beta > 0$  e  $\alpha \leq 0$  la funzione  $V_{eff}(\rho)$  ha un punto di minimo in  $\rho_0$  ed è convessa.

Per  $\beta = 0$  e  $\alpha > 0$  l'energia potenziale efficace è definita su tutto l'asse reale poichè il moto è un moto unidimensionale, e diverge a  $-\infty$  per  $\rho \rightarrow 0$ . La funzione  $V_{eff}(\rho) = V(r)$  cambia concavità nei punti

$$\bar{\rho}_{\pm} = \pm(3\alpha)^{1/12}$$

ed è concava per  $0 < |\rho| < \bar{\rho}_+$  e convessa per  $|\rho| > \bar{\rho}_+$ .

Per  $\beta = 0$  e  $\alpha = 0$  l'energia potenziale efficace è definita su tutto l'asse reale ed è convessa. Per  $\beta = 0$  e  $\alpha < 0$  l'energia potenziale efficace è definita su tutto l'asse reale e diverge a  $+\infty$  per  $\rho \rightarrow 0$ . Inoltre la funzione è strettamente convessa.

**3.5 Analisi qualitativa.** Studiamo le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (\rho, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : H(\rho, y) := \frac{1}{2}\mu y^2 + V_{eff}(\rho) = E \right\}$$

dell'energia del sistema.

Per  $\beta > 0$  e  $\alpha > \beta^2/4$  si ha la situazione rappresentata in Figura 14, per  $\beta > 0$  e  $\alpha = \beta^2/4$  si ha la situazione in figura 15, per  $\beta > 0$  e  $0 < \alpha < \beta^2/4$  si ha la situazione rappresentata in figura 16, mentre per  $\beta > 0$  e  $\alpha \leq 0$  si ha la situazione rappresentata in figura 17. Per  $\beta = 0$  e  $\alpha > 0$  si ha la situazione in Figura 18, per  $\beta = 0$  e  $\alpha = 0$  si ha la situazione rappresentata in figura 19, mentre per  $\beta = 0$  e  $\alpha < 0$  si ha la situazione in Figura 20.

**3.6 traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .** Si possono avere traiettorie periodiche solo per  $\beta > 0$  e  $\alpha < \beta^2/4$  e per  $\beta = 0$  e  $\alpha \leq 0$ .

I dati iniziali  $(\bar{\rho}, \bar{y})$  si devono scegliere nei rispettivi casi come segue. Se  $\beta > 0$  e  $0 < \alpha < \beta^2/4$  si deve avere  $\bar{\rho} > \rho_1$  e  $V_{eff}(\rho_2) < H(\bar{\rho}, \bar{v}) < V_{eff}(\rho_1)$ . Se  $\beta > 0$  e  $\alpha \leq 0$  si deve avere  $H(\bar{\rho}, \bar{y}) > V_{eff}(\rho_0)$  (ovvero  $(\bar{\rho}, \bar{y}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \setminus \{(\rho_0, 0)\}$ ). Se  $\beta = 0$  e  $\alpha = 0$  si deve avere  $(\bar{\rho}, \bar{v}) \neq (0, 0)$ . Se infine  $\beta = 0$  e  $\alpha > 0$  si deve avere  $\bar{\rho} \neq 0$  e  $H(\bar{\rho}, \bar{v}) > V_{eff}(\rho_0)$ , con  $\rho_0 = \pm(-\alpha)^{1/12}$ .

**3.7 Traiettorie periodiche per l moto complessivo.** Per avere moti periodici si hanno due possibilità. La prima è che sia  $(\rho(0), \dot{\rho}(0)) = (\rho_0, 0)$ , con  $V_{eff}'(\rho_0) = 0$ , ovvero che la variabile radiale sia ferma nel suo punto di equilibrio: in tal caso risulta  $\dot{\theta} = L/\mu\rho_0^2$ , e quindi il punto materiale si muove lungo un'orbita con velocità angolare costante (e quindi si muove di moto

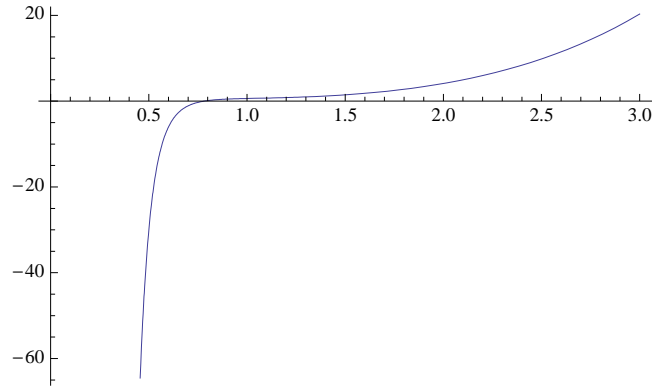


Figura 7: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\beta > 0$  e  $\alpha > \beta^2/4$

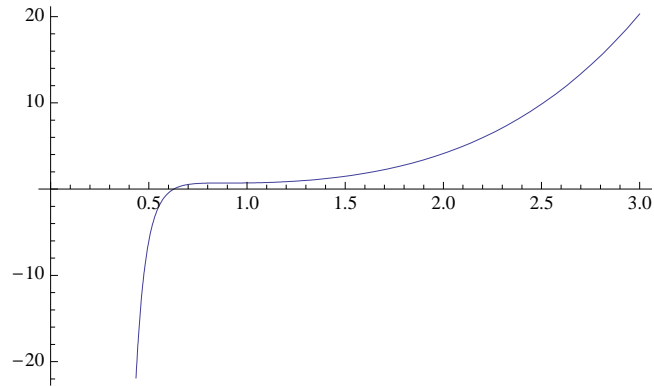


Figura 8: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\beta > 0$  e  $\alpha = \beta^2/4$

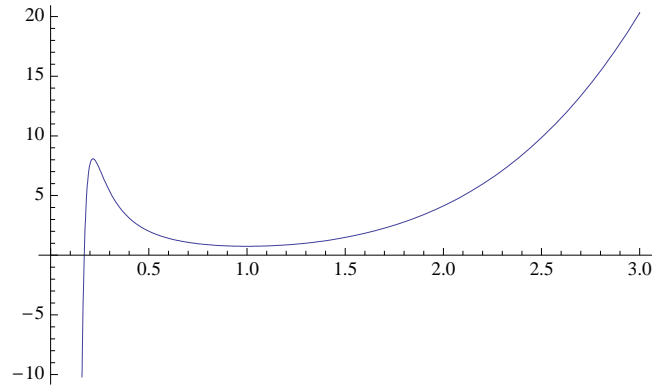


Figura 9: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\beta > 0$  e  $0 < \alpha < \beta^2/4$

circolare uniforme).

La seconda è che  $(\rho(0), \dot{\rho}(0)) = (\bar{\rho}, \bar{v})$ , in modo tale che le condizioni al punto 3.6 per avere un moto periodico per la variabile  $\rho$  siano soddisfatte, e che l'incremento  $\Delta\theta$  della variabile angolare  $\theta$  in un periodo  $T_0$  della variabile radiale sia commensurabile con  $2\pi$ .

Si ha la prima situazione per  $\beta > 0$  e  $\alpha = \beta^2/4$  se  $\rho(0) = (\beta/2)^{1/16}$ ,  $\beta > 0$  e  $0 < \alpha < \beta^2/4$  se  $\rho(0) = \rho_1$  oppure  $\rho(0) = \rho_2$ , per  $\beta > 0$  e  $\alpha \leq 0$  per  $\rho(0) = \rho_0$ , per  $\beta = 0$  e  $\alpha = 0$  se  $\rho(0) = 0$ , e per  $\beta = 0$  e  $\alpha > 0$  se  $\rho(0) = \pm(3\alpha)^{1/12}$ .

La seconda situazione si ha se il dato iniziale è scelto in accordo con quanto discusso al punto

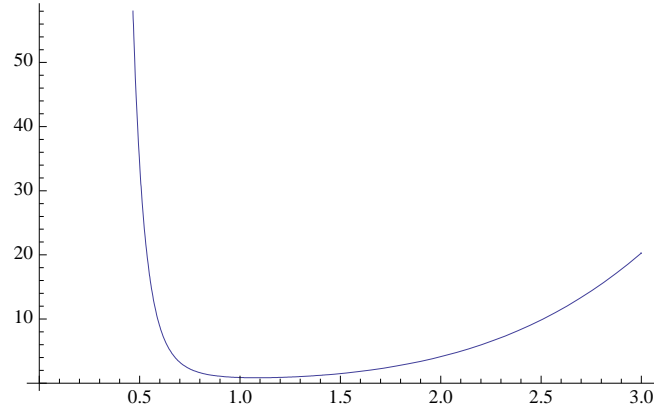


Figura 10: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\beta > 0$  e  $\alpha \leq 0$

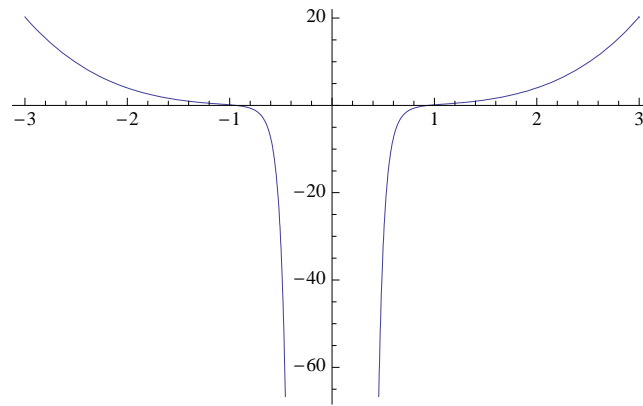


Figura 11: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\beta = 0$  e  $\alpha = 0$

3.6 e

$$\Delta\theta := 2 \int_{\rho_-(E)}^{\rho_+(E)} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2\mu}{I^2}(E - V_{eff}(\rho))}} = 2\pi \frac{p}{q}$$

per  $p, q \in \mathbb{N}$  primi tra loro, dove  $\rho_{\pm}(E)$  sono le radici dell'equazione  $V_{eff}(\rho) = E$



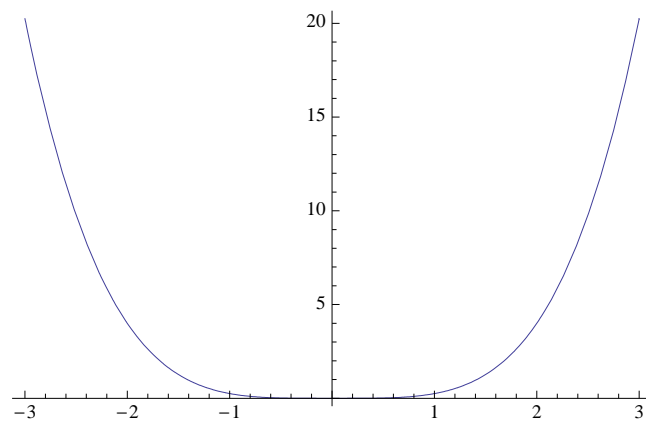


Figura 12: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\beta = 0$  e  $\alpha = 0$

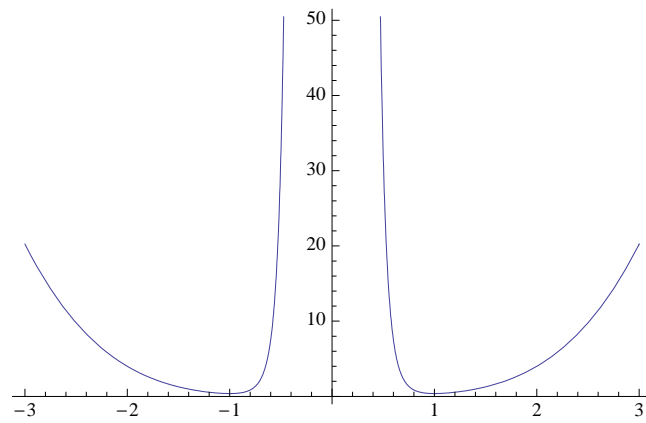


Figura 13: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  per  $\beta = 0$  e  $\alpha < 0$

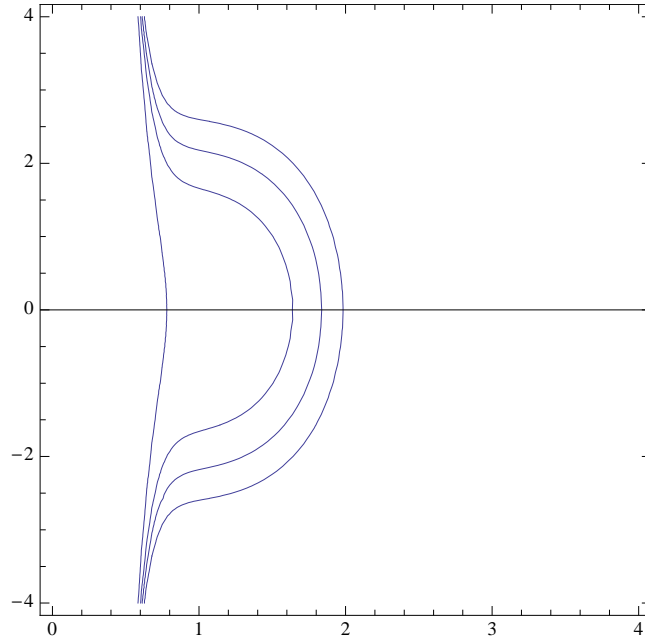


Figura 14: Piano delle fasi  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $\beta > 0$  e  $\alpha > \beta^2/4$

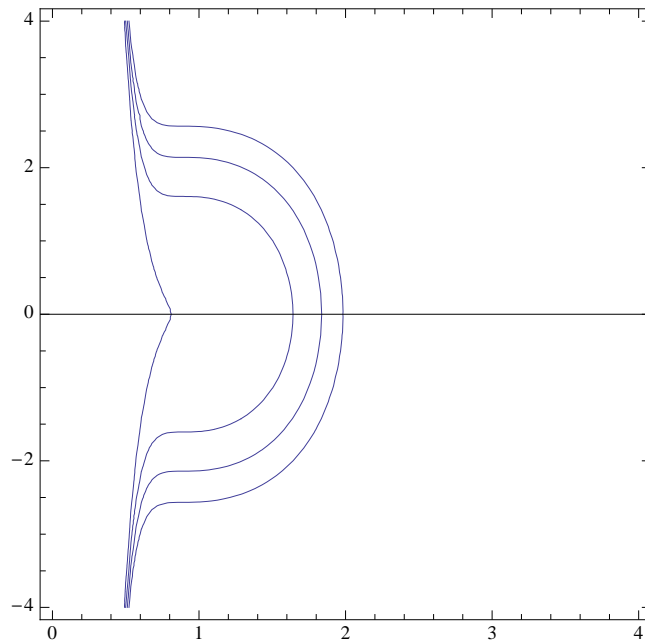


Figura 15: Piano delle fasi  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $\beta > 0$  e  $\alpha = \beta^2/4$

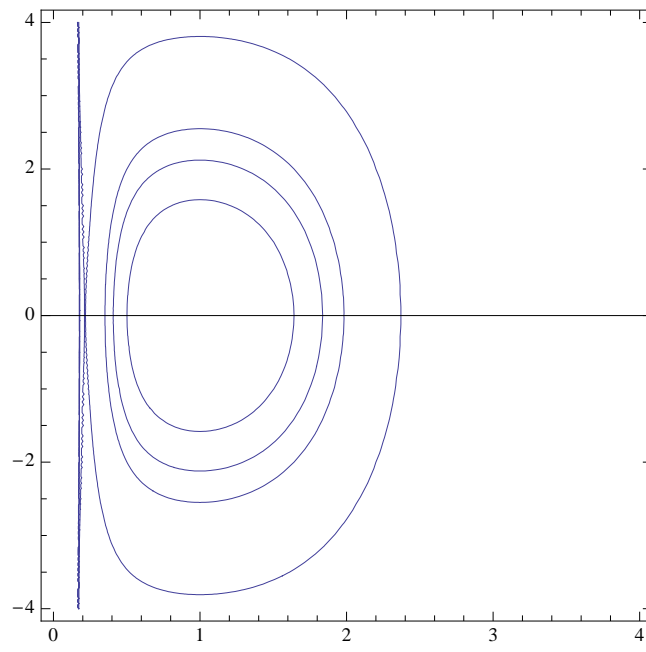


Figura 16: Piano delle fasi  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $\beta > 0$  e  $0 < \alpha < \beta^2/4$

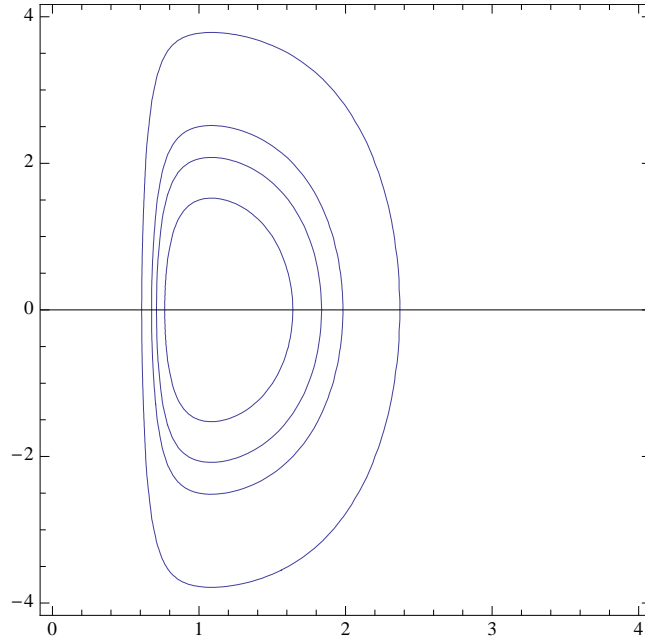


Figura 17: Piano delle fasi  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $\beta > 0$  e  $\alpha \leq 0$

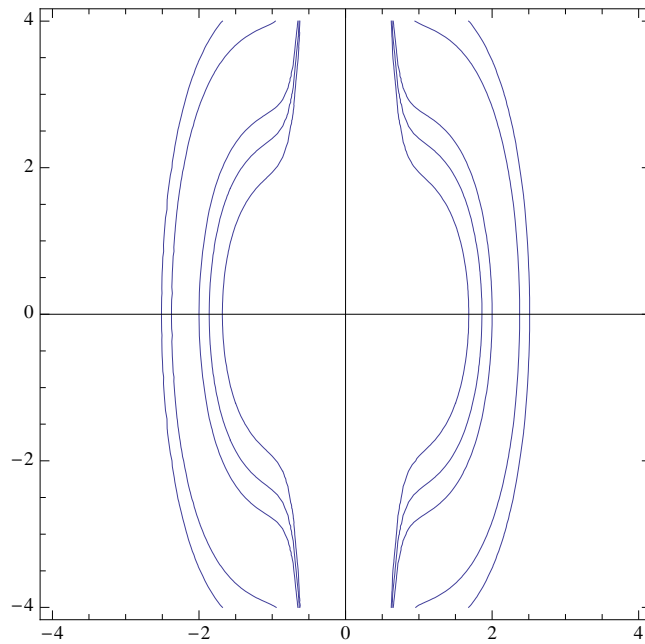


Figura 18: Piano delle fasi  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $\beta = 0$  e  $\alpha > 0$

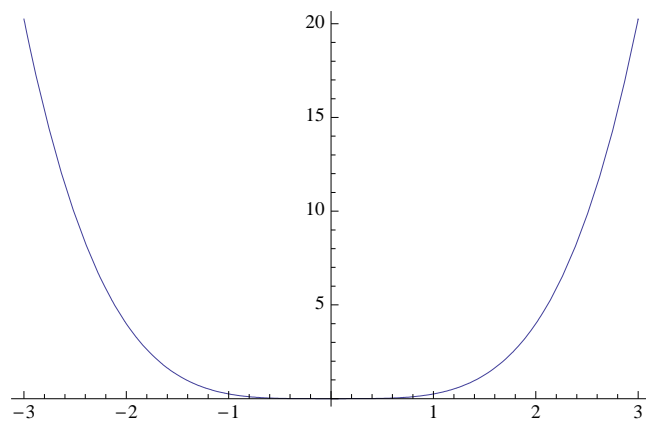


Figura 19: Piano delle fasi  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $\beta = 0$  e  $\alpha = 0$

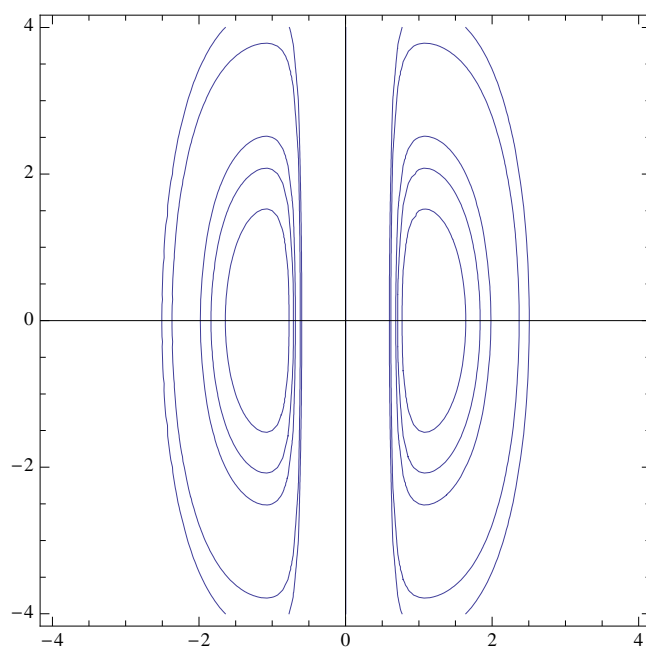


Figura 20: Piano delle fasi  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $\beta = 0$  e  $\alpha < 0$