Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 25/11/22 - foglio 1/3*

Esercizio 1 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{\frac{n+a}{n-a}}-n\right), \qquad a=\pm 2, \pm 1.$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{\frac{n+a}{n-a}}-n\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\frac{n+a}{n-a}-1}{\sqrt{\frac{n+a}{n-a}}+1} = \lim_{n\to\infty} n\frac{\frac{2a}{n-a}}{\sqrt{\frac{1+\frac{a}{n}}{1-\frac{a}{n}}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a}{1-\frac{a}{n}}}{\sqrt{\frac{1+\frac{a}{n}}{1-\frac{a}{n}}}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{2a}{1-\frac{a}{n}}}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{a}{n}}{1-\frac{a}{n}}}+1\right)}$$

$$= a.$$

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)-3\arcsin x}{\arcsin^3(3x)+3\arcsin\left(x^3\right)}.$$

Soluzione: Dallo sviluppo di Taylor

$$\arcsin x = x+o(x) = x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)-3\arcsin x}{\arcsin^3(3x)+3\arcsin\left(x^3\right)} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x+\frac{27x^3}{6}+o\left(x^3\right)-3\left(x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{(3x+o(x))^3+3\left(x^3+o\left(x^3\right)\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4x^3+o\left(x^3\right)}{27x^3+3x^3+o\left(x^3\right)}\\
&= \frac{4}{27+3}\\
&= \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Allo stesso modo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\arcsin x-\arcsin(3x)}{\arcsin^3(3x)+3\arcsin\left(x^3\right)} = -\frac{2}{15}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^3(3x)+3\arcsin\left(x^3\right)}{\arcsin(3x)-3\arcsin x} = \frac{15}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^3(3x)+3\arcsin\left(x^3\right)}{3\arcsin x-\arcsin(3x)} = -\frac{15}{2}.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 25/11/22 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (16 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{e^{2ax}}{e^{ax}-2}, \qquad a = 2, 3, 4, 5$$

determinandone:

(2 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: Il denominatore non si annulla per $x \neq \dfrac{\ln 2}{a}$, dunque il dominio è

$$\left(-\infty, \frac{\ln 2}{a}\right) \cup \left(\frac{\ln 2}{a}, +\infty\right).$$

(2 punti) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione non è pari né dispari né periodica.

(2 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché il numeratore è sempre positivo, il segno è lo stesso del denominatore, e cioè:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in \left(\frac{\ln 2}{a}, +\infty\right), \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \left(-\infty, \frac{\ln 2}{a}\right); \end{aligned}$$

inoltre, $f(0) = -1$ e f non si annulla mai, dunque:

$$\begin{aligned} f(x) &\quad \text{interseca l'asse verticale in } (0, -1), \\ f(x) &\quad \text{non interseca l'asse orizzontale.} \end{aligned}$$

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo:

$$\lim_{x \to \frac{\ln 2}{a}^{\pm}} = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) + \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0;$$

dunque, $x = \dfrac{\ln 2}{a}$ è un asintoto verticale, $y = 0$ è un asintoto orizzontale, mentre non ci sono asintoti obliqui perché $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

(2 punti) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile in tutto il suo dominio e la derivata è:

$$f'(x) = \frac{a e^{2ax}(e^{ax} - 4)}{(e^{ax} - 2)^2}.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 25/11/22 - foglio 3/3*

(2 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Poiché il denominatore è sempre positivo, f' avrà lo stesso segno del numeratore, cioè:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in \left(\frac{\ln 2}{a}, \frac{\ln 4}{a}\right), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in \left(-\infty, \frac{\ln 2}{a}\right) \cup \left(\frac{\ln 4}{a}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{ha un minimo in} & x = \frac{\ln 4}{a} \end{array}$$

(2 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

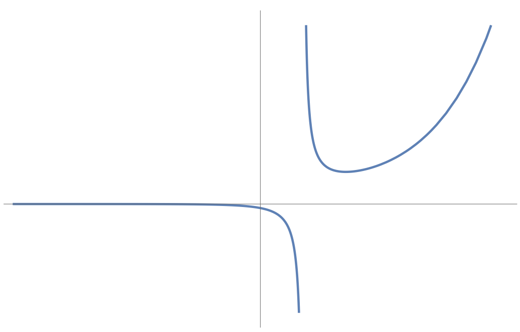
$$f''(x) = \frac{a^2 e^{2ax}\left(e^{2ax} - 6e^{ax} + 16\right)}{\left(e^{ax} - 2\right)^3},$$

con il numeratore sempre positivo poiché il polinomio $y^2 - 6y + 16$ non ha radici, il segno sarà lo stesso del denominatore, e cioè:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(-\infty, \frac{\ln 2}{a}\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(\frac{\ln 2}{a}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{non ha flessi.} & \end{array}$$

(2 punti) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.