

Nome:	Cognome:	Matricola:
-------	----------	------------

Prova di Analisi I - fac-simile - foglio 1/2*

Esercizio 1 (12 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

Soluzione: Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\arctan x}{x} \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \left[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$

***ISTRUZIONI:**

Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.

Non usare libri, appunti né calcolatrici.

Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:
-------	----------	------------

Prova di Analisi I - fac-simile - foglio 2/2*

Esercizio 2 (12 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\pi} - 1 \right);$

Soluzione: Poiché $\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\pi} - 1}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi$, la serie ha lo stesso andamento di $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, dunque

NON CONVERGE.

(3 punti) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\pi} - 1 \right).$

Soluzione: Poiché $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\pi} - 1 \right)$ è positiva, decrescente e infinitesima, dal criterio per serie alternate otteniamo che la serie

CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^8 - (1 + 2i)(1 - 2i)z^2 = 0.$$

Soluzione: Scrivendo $z^8 - (1 + 2i)(1 - 2i)z^2 = z^2(z^6 - (1 + 2i)(1 - 2i))$, le soluzioni saranno quelle di $z^2 = 0$ e di $z^6 = (1 + 2i)(1 - 2i) = 5 = 5e^{i \cdot 0}$, cioè

$$z = 0, z = \sqrt[6]{5}e^{i \frac{k\pi}{3}}, \quad k = 0, \dots, 5.$$

***ISTRUZIONI:**

Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.

Non usare libri, appunti né calcolatrici.

Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.