Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 02/12/21 - foglio 1/3*

Esercizio 1 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^n\sqrt{e^{2n}+a}-e^{2n}\right)\qquad (a=1,2,3,4).$$

Soluzione:

$$e^n\sqrt{e^{2n}+a}-e^{2n}=e^n\left(\sqrt{e^{2n}+a}-\sqrt{e^{2n}}\right)=e^n\frac{a}{\sqrt{e^{2n}+a}+\sqrt{e^{2n}}}=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{e^{2n}}}+1}\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{a}{2}.$$

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)-\sin^2 x}{\arcsin^2\left(x^2\right)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\sin\left(-x^2\right)}{\arcsin^2\left(x^2\right)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)-\sin^2 x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2\left(x^2\right)}{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}.$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}\sin x &= x+o\left(x^2\right)=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\\ \arcsin x &= x+o(x)\end{aligned}$$

si ottiene

$$\frac{\sin\left(x^2\right)-\sin^2 x}{\arcsin^2\left(x^2\right)}=\frac{x^2+o\left(x^4\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^2}{\left(x^2+o\left(x^2\right)\right)^2}=\frac{\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}\underset{x\to 0}{\to}\frac{1}{3}.$$

Allo stesso modo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{\arcsin^2\left(x^2\right)}=-\frac{1}{3},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)-\sin^2 x}=3,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2\left(x^2\right)}{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}=-3.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 02/12/21 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (16 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1+x)},$$

determinandone:

(2 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: L'argomento del logaritmo è positivo per $x > -1$ e il denominatore non si annulla per $x \neq e-1$, dunque il dominio è

$$(-1, e-1) \cup (e-1, +\infty).$$

(2 punti) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: f non è pari né dispari né simmetrica.

(2 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Il segno di f sarà lo stesso del denominatore, dunque

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in (-1, e-1) \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \in (e-1, +\infty); \end{aligned}$$

inoltre, $f(0) = 1$ e f non si annulla mai, dunque

$$\begin{aligned} &f(x) \qquad \text{interseca l'asse verticale in } (0,1), \\ &f(x) \qquad \text{non interseca l'asse orizzontale.} \end{aligned}$$

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to e-1^{\mp}} f(x) = \pm\infty;$$

dunque, $y = 0$ è un asintoto orizzontale e $x = 1$ è un asintoto verticale.

(2 punti) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)(1-\ln(1+x))^2}.$$

(2 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 02/12/21 - foglio 3/3*

Soluzione: Poiché $f'(x) > 0$ per ogni x, allora

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in (-1, e-1) \cup (e-1, +\infty), \\ f(x) & \text{non ha massimi né minimi.} & \end{array}$$

(2 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

$$f''(x) = \frac{1 - \ln^2(1+x)}{(1+x)^2(1-\ln(1+x))^4},$$

studiandone il segno si deduce che, nei vari casi

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(-1+\frac{1}{e}, e-1\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(-1, -1+\frac{1}{e}\right) \cup (e-1, +\infty), \\ f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = -1+\frac{1}{e}. \end{array}$$

(2 punti) Grafico qualitativo.

Soluzione:

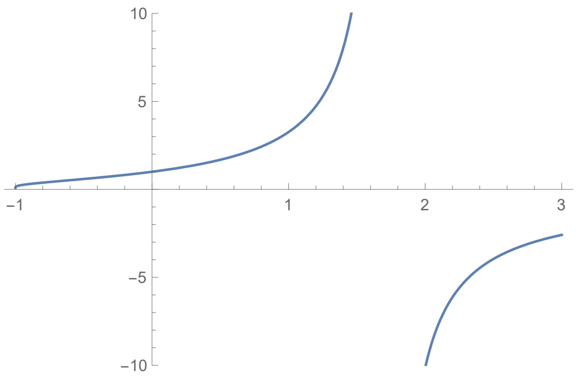

Figura 1: Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{1-\ln(1+x)}$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 02/12/21 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (16 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1-x)},$$

determinandone:

(2 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: L'argomento del logaritmo è positivo per $x < 1$ e il denominatore non si annulla per $x \neq -e+1$, dunque il dominio è

$$(-\infty, -e+1) \cup (-e+1, 1).$$

(2 punti) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: f non è pari né dispari né simmetrica.

(2 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Il segno di f sarà lo stesso del denominatore, dunque

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in (-e+1, 1) \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, -e+1); \end{aligned}$$

inoltre, $f(0) = 1$ e f non si annulla mai, dunque

$$\begin{aligned} &f(x) \qquad \text{interseca l'asse verticale in } (0,1), \\ &f(x) \qquad \text{non interseca l'asse orizzontale.} \end{aligned}$$

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to -e+1^\pm} f(x) = \pm\infty;$$

dunque, $y = 0$ è un asintoto orizzontale e $x = -1$ è un asintoto verticale.

(2 punti) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-x)(1-\ln(1-x))^2}.$$

(2 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 02/12/21 - foglio 3/3*

Soluzione: Poiché $f'(x) < 0$ per ogni x, allora

$$
\begin{array}{lll}
f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in (-\infty, -e+1) \cup (-e+1, 1), \\
f(x) & \text{non ha massimi né minimi.} &
\end{array}
$$

(2 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

$$f''(x) = \frac{1 - \ln^2(1-x)}{(1-x)^2(1-\ln(1-x))^4},$$

studiandone il segno si deduce che, nei vari casi

$$
\begin{array}{lll}
f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(-e+1, 1-\dfrac{1}{e}\right), \\
f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in (-\infty, -e+1) \cup \left(1-\dfrac{1}{e}, 1\right), \\
f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = 1 - \dfrac{1}{e}.
\end{array}
$$

(2 punti) Grafico qualitativo.

Soluzione:

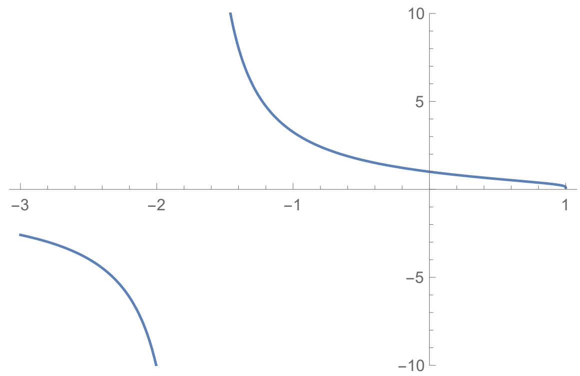

Figura 2: Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{1-\ln(1-x)}$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 02/12/21 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (16 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x) - 1},$$

determinandone:

(2 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: L'argomento del logaritmo è positivo per $x > -1$ e il denominatore non si annulla per $x \neq e - 1$, dunque il dominio è

$$(-1, e-1) \cup (e-1, +\infty).$$

(2 punti) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: f non è pari né dispari né simmetrica.

(2 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Il segno di f sarà lo stesso del denominatore, dunque

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in (e-1, +\infty) \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \in (-1, e-1); \end{aligned}$$

inoltre, $f(0) = -1$ e f non si annulla mai, dunque

$$\begin{aligned} &f(x) \qquad \text{interseca l'asse verticale in } (0,-1), \\ &f(x) \qquad \text{non interseca l'asse orizzontale.} \end{aligned}$$

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to e-1^{\pm}} f(x) = \pm\infty;$$

dunque, $y = 0$ è un asintoto orizzontale e $x = 1$ è un asintoto verticale.

(2 punti) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)(\ln(1+x) - 1)^2}.$$

(2 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 02/12/21 - foglio 3/3*

Soluzione: Poiché $f'(x) < 0$ per ogni x, allora

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in (-1, e-1) \cup (e-1, +\infty), \\ f(x) & \text{non ha massimi né minimi.} & \end{array}$$

(2 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

$$f''(x) = \frac{\ln^2(1+x) - 1}{(1+x)^2(\ln(1+x)-1)^4},$$

studiandone il segno si deduce che, nei vari casi

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(-1, -1+\dfrac{1}{e}\right) \cup (e-1, +\infty), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(-1+\dfrac{1}{e}, e-1\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = -1+\dfrac{1}{e}. \end{array}$$

(2 punti) Grafico qualitativo.

Soluzione:

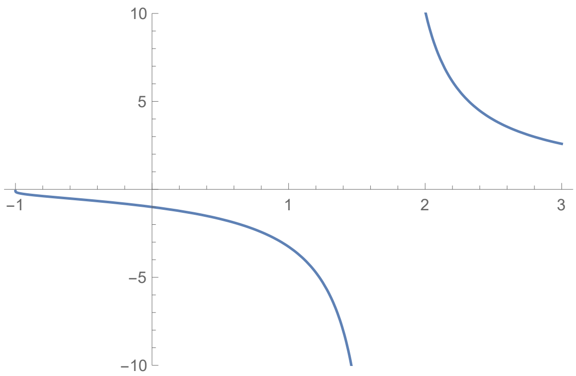

Figura 3: Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x) - 1}$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 02/12/21 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (16 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1-x)-1},$$

determinandone:

(2 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: L'argomento del logaritmo è positivo per $x < 1$ e il denominatore non si annulla per $x \neq -e+1$, dunque il dominio è

$$(-\infty, -e+1) \cup (-e+1, 1).$$

(2 punti) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: f non è pari né dispari né simmetrica.

(2 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Il segno di f sarà lo stesso del denominatore, dunque

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, -e+1) \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \in (-e+1, 1); \end{aligned}$$

inoltre, $f(0) = -1$ e f non si annulla mai, dunque

$$\begin{aligned} &f(x) \qquad \text{interseca l'asse verticale in } (0, -1), \\ &f(x) \qquad \text{non interseca l'asse orizzontale.} \end{aligned}$$

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -e+1^\pm} f(x) = \mp\infty;$$

dunque, $y = 0$ è un asintoto orizzontale e $x = 1$ è un asintoto verticale.

(2 punti) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)(\ln(1-x)-1)^2}.$$

(2 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 02/12/21 - foglio 3/3*

Soluzione: Poiché $f'(x) > 0$ per ogni x, allora

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in (-\infty, -e+1) \cup (-e+1, 1), \\ f(x) & \text{non ha massimi né minimi.} & \end{array}$$

(2 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

$$f''(x) = \frac{\ln^2(1-x) - 1}{(1-x)^2(1-\ln(1-x))^4},$$

studiandone il segno si deduce che, nei vari casi

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in (-\infty, -e+1) \cup \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(-e+1, 1 - \frac{1}{e}\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = 1 - \frac{1}{e}. \end{array}$$

(2 punti) Grafico qualitativo.

Soluzione:

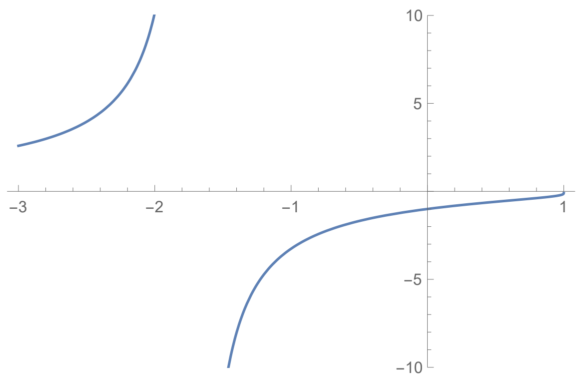

Figura 4: Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1-x) - 1}$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.