Esercizi su integrali

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x; \qquad \int \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}\mathrm{d}x; \qquad \int \sin^3 x \mathrm{d}x; \qquad \int x\cos(2x)\mathrm{d}x; \qquad \int \arcsin x \mathrm{d}x.$$

Con il cambio di variabile $t = e^x$ si ottiene $x = \ln t$, dunque $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{arctg} t + c \\
&= \mathrm{arctg}(e^x) + c.
\end{aligned}$$

Con il cambio di variabile $t = \sqrt[3]{x}$ si ottiene $x = t^3$, dunque $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{y-1}3y^2\mathrm{d}y \\
&= \int \left(3y + 3 + \frac{3}{y-1}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{2}y^2 + 3y + 3\ln|y-1| + c \\
&= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x} - 1\right| + c.
\end{aligned}$$

Scrivendo $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)\sin x$, con il cambio di variabile $y = \cos x$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x\mathrm{d}x &= \int \left(1 - \cos^2 x\right)\sin x\mathrm{d}x \\
&= \int -\left(1 - y^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{y^3}{3} - y + c \\
&= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c.
\end{aligned}$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int x\cos(2x)\mathrm{d}x &= x\frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + c.
\end{aligned}$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x \mathrm{d}x &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.
\end{aligned}$$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \mathrm{d}x; \qquad \int_2^4 \frac{1}{x^3 - x} \mathrm{d}x; \qquad \int_0^1 x \mathrm{arctg} x \mathrm{d}x; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1-\sin(2x)} \mathrm{d}x; \qquad \int_{-1}^1 (1+\mathrm{tg} x) e^{|x|} \mathrm{d}x.$$

Con il cambio di variabile $y = \ln x$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \mathrm{d}x &= \int_0^1 y^2 \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Scrivendo $\dfrac{1}{x^3 - x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1}$ si ottiene

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A\left(x^2 - 1\right) + B\left(x^2 + x\right) + C\left(x^2 - x\right)}{x^3 - x},$$

dunque $\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 0 \\ -A = 1 \end{cases}$, ovvero $A = -1, B = C = \dfrac{1}{2}$, e quindi:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{1}{x^3 - x} \mathrm{d}x &= \int_2^4 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\ln|x| + \frac{\ln|x-1|}{2} + \frac{\ln|x+1|}{2}\right]_2^4 \\
&= \frac{\ln 5}{2} - \ln 2.
\end{aligned}$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \mathrm{arctg} x \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} \mathrm{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x^2 + 1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{8} - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + 1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{8} - \left[\frac{x}{2} - \frac{\mathrm{arctg} x}{2}\right]_0^1
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi-2}{4}.$$

Con i cambi di variabile $t = 2x, s = \tan\frac{x}{2}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1-\sin(2x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-\frac{2s}{1+s^2}}\frac{2}{1+s^2}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(s-1)^2}\mathrm{d}s \\
&= \left[-\frac{1}{s-1}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Poiché $e^{|x|}$ è pari e $\mathrm{tg}(x)e^{|x|}$ è dispari, allora

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1+\mathrm{tg}x)e^{|x|}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 e^{|x|}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 e^{x}\mathrm{d}x \\
&= 2\left[e^x\right]_0^1 \\
&= 2e-2.
\end{aligned}$$

3. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^\pi}\mathrm{d}x; \qquad \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x; \qquad \int_0^1 \frac{|\ln x|}{x+1}\mathrm{d}x; \qquad \int_0^1 \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x-\sin x}\mathrm{d}x; \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\frac{1}{x}}{\mathrm{arctg}x}\mathrm{d}x.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^\pi}\mathrm{d}x; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{|\ln x|}{x+1}\mathrm{d}x; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x-\sin x}\mathrm{d}x\mathrm{d}x; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\frac{1}{x}}{\mathrm{arctg}x}\mathrm{d}x.$$

Poiché $\frac{\frac{1}{\sqrt{x}+x^\pi}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x\to 0}{\to} 1$, allora l'integrale del numeratore e del denominatore hanno lo stesso comportamento, dunque

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^\pi}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

Poiché $\frac{1-\cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}$, l'integranda è limitata e dunque

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

Poiché $\dfrac{\frac{|\ln x|}{x+1}}{\ln\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\to} 1$, i due integrali hanno lo stesso comportamento, dunque

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x+1}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

Dagli sviluppi di Taylor $e^{-x}-e^{-2x}=x+O\left(x^2\right), x-\sin x=\dfrac{x^3}{6}+O\left(x^4\right)$, l'integranda ha il comportamento di $\dfrac{1}{x^2}$, dunque

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x-\sin x}\mathrm{d}x \qquad \text{diverge.}$$

Poiché $\dfrac{\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arctg}x}}{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\to} \dfrac{\pi}{2}$, allora il comportamento è lo stesso di $\dfrac{1}{x}$, dunque

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arctg}x}\mathrm{d}x \qquad \text{diverge.}$$

Poiché $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}+x^{\pi}}}{\frac{1}{x^{\pi}}} \underset{x\to +\infty}{\to} 1$, gli integrali delle due funzioni hanno lo stesso comportamento e dunque

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^{\pi}}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

Poiché $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \leq \dfrac{2}{x^2}$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$ converge, allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

Poiché $\dfrac{\frac{|\ln x|}{x+1}}{\frac{1}{x}} \underset{x\to +\infty}{\to} +\infty$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ diverge, allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\ln x|}{x+1}\mathrm{d}x \qquad \text{diverge.}$$

Poiché $\dfrac{\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x-\sin x}}{\frac{e^{-x}}{x}} \underset{x\to +\infty}{\to} 1$ e l'integrale del denominatore converge, allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x-\sin x}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

Poiché $\dfrac{\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arctg}x}}{\frac{1}{x}} \underset{x\to +\infty}{\to} \dfrac{2}{\pi}$, allora il comportamento è lo stesso di $\dfrac{1}{x}$, dunque

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arctg}x}\mathrm{d}x \qquad \text{diverge.}$$