Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I (fac-simile) foglio 1/4[*]

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n \ln n - \ln n!}.$$

Soluzione: Poiché $\sin n$ è limitata e $n \ln n - \ln n! = \ln \frac{n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, allora dal teorema dei Carabinieri concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n \ln n - \ln n!} = 0.$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{arctg} x}}{x^3}.$$

Soluzione: Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right), \qquad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + O\left(x^5\right),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{arctg} x}}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right) - e^{x - \frac{x^3}{3} + O\left(x^5\right)}}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right) - 1 - \left(x - \frac{x^3}{3} + O\left(x^5\right)\right) - \frac{\left(x + O\left(x^3\right)\right)^2}{2} - \frac{\left(x + O\left(x^3\right)\right)^3}{6} + O\left(x\right.}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + O(x)\right) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

[*]Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I (fac-simile) foglio 2/4*

Esercizio 3 (7 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = x\sqrt{x+3},$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(1 punto) Eventuali punti di discontinuità e non derivabilità;

(1 punto) Studio della derivata prima con intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi;

(1 punto) Studio della derivata seconda con intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi.

Dominio: La funzione è definita quando l'argomento della radice è non-negativo, cioè:

$$\{x \geq -3\}.$$

Simmetrie:

La funzione non è pari né dispari né periodica.

Segno: Poiché la radice è sempre maggiore o uguale a zero, il segno della funzione sarà lo stesso del primo fattore, cioè:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{se } -3 < x < 0, \\ f(x) &< 0 \quad \text{se } x > 0; \end{aligned}$$

essendo $f(0) = 0$, allora

$$f(x) \text{ interseca l'asse verticale in } (0,0);$$

poiché $f(x) = 0$ per $x = -3, 0$,

$$\text{le intersezioni con l'asse orizzontale hanno luogo nei punti } (-3,0), (0,0).$$

Estremi del dominio: I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty;$$

dunque la funzione non ha asintoti.

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

ontinuità e derivabilità: Poiché radici e potenze non hanno problemi di continuità sul loro dominio, deduciamo che:

$$f(x) \text{ è continua su tutto il suo insieme di definizione;}$$

la funzione non è derivabile in $x = -3$ perché

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim_{x \to -3^+} \frac{x\sqrt{x+3}}{x+3} = -3 \lim_{x \to -3} \frac{1}{\sqrt{x+3}} = -\infty,$$

mentre non ci sono problemi di derivabilità in altri punti, dunque:

$$f(x) \text{ è derivabile in} x \neq -3.$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}};$$

poiché il denominatore è sempre positivo, il segno è lo stesso del numeratore, otteniamo:

$$\begin{array}{ccl} f(x) & \text{è crescente} & \text{se } x > -2, \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{se } -3 < x < -2, \\ f(x) & \text{ha un minimo in} & x = 2. \end{array}$$

Derivata seconda:

$$f(x) = \frac{3x+12}{4(x+3)^{\frac{3}{2}}};$$

sia il numeratore che il denominatore sono positivi sul dominio,

$$f(x) \text{è convessa su tutto il suo insieme di definizione e non ha punti di flesso.}$$

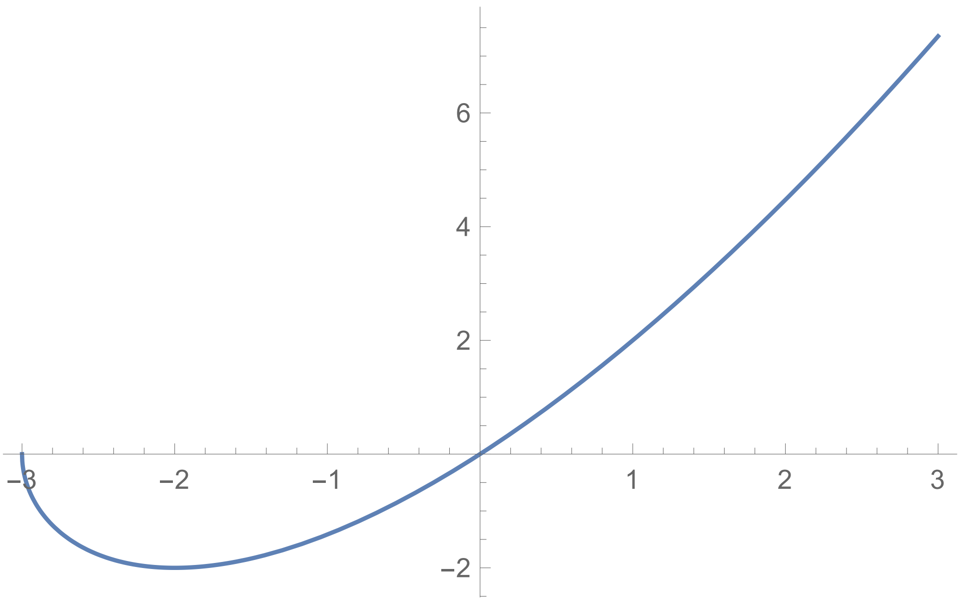

Figura 1: Grafico di $f(x) = x\sqrt{x+3}$.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I (fac-simile) foglio 3/4*

Esercizio 4 (5 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^5+|x|}{(|x|+1)^2}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché $\frac{x^5}{(|x|+1)^2}$ è una funzione dispari mentre $\frac{|x|}{(|x|+1)^2}$ è pari, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{x^5+|x|}{(|x|+1)^2}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \frac{|x|}{(|x|+1)^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}dx \\
&= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\right]_0^1 \\
&= 2\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (5 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!2^k}{k^k}.$$

Soluzione: Poiché $\frac{\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!2^n}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!}2\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{2}{e} < 1$, allora dal criterio del rapporto si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k}{k^k} \qquad \text{converge.}$$

Per lo stesso motivo, la seconda serie converge assolutamente e dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!2^k}{k^k} \qquad \text{converge.}$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I (fac-simile) foglio 4/4*

Esercizio 6 (5 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^3 = \overline{2+\imath} - \imath.$$

Soluzione: Il numero $w = \overline{2+\imath} - \imath = 2 - 2\imath$ in forma trigonometrica si scrive come $w = re^{\imath t}$ con $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ e $t = \dfrac{7}{4}\pi$, dunque le sue radici cubiche saranno $z = \left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\imath\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ con $k = 0, 1, 2$, e cioè:

$$\sqrt{2}e^{\imath\left(\frac{7}{12}\pi + k\frac{2}{3}\pi\right)}, \qquad \text{con } k = 0, 1, 2.$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.