Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 28/06/21 - foglio 1/4*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n!e^{\frac{\pi}{n!}}-n!\right).$$

Soluzione: Dal limite notevole $\dfrac{e^x-1}{x}\underset{x\to0}{\to}0$ si ottiene che:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(n!e^{\frac{\pi}{n!}}-n!\right) &= \pi\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{n!}}-1}{\frac{\pi}{n!}}\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x+x^2}-1-x}{1-\sqrt{\cos x}}.$$

Soluzione: Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right),\qquad \sqrt{1+x}=1+x+O\left(x^2\right),\qquad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+O\left(x^4\right),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{x+x^2}-1-x}{1-\sqrt{\cos x}} &= \lim_{x\to0}\frac{1+\left(x+x^2\right)+\frac{\left(x+x^2\right)^2}{2}+O\left(\left(x+x^2\right)^3\right)-1-x}{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{2}+O\left(x^4\right)}}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{x^2+\frac{\left(x+O\left(x^2\right)\right)^2}{2}+O\left(x^3\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{4}+O\left(x^4\right)\right)}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{2}x^2+O\left(x^3\right)}{\frac{x^2}{4}+O\left(x^3\right)}\\ &= 6.\end{aligned}$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 28/06/21 - foglio 2/4*

Esercizio 3 (7 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = e^{2x} - e^x - 2,$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;
(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;
(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;
(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;
(1 punto) Eventuali punti di discontinuità e non derivabilità;
(1 punto) Studio della derivata prima con intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi;
(1 punto) Studio della derivata seconda con intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi.

Dominio: Poiché gli esponenziali sono definiti sull'intera retta reale, la funzione è definita

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

Simmetrie:

La funzione non è pari né dispari né periodica.

Segno: Scrivendo $f(x) = (e^x + 1)(e^x - 2)$, essendo il primo fattore positivo il segno della funzione sarà lo stesso del secondo fattore e cioè:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{se } x > \ln 2, \\ f(x) &< 0 \quad \text{se } x < \ln 2; \end{aligned}$$

essendo $f(0) = -2$, allora

$$f(x) \text{ interseca l'asse verticale in } (0, -2);$$

poiché $f(x) = 0$ per $x = \ln 2$,

$$f(x) \text{ interseca l'asse orizzontale in } (\ln 2, 0).$$

Estremi del dominio: I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;$$

dunque la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

ontinuità e derivabilità: Poiché le funzioni esponenziali non hanno problemi di continuità e derivabilità, deduciamo che

$$f(x) \text{ è continua e derivabile su tutto il suo insieme di definizione.}$$

Derivata prima:

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x;$$

scrivendo la derivata prima come $2e^x\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$, deduciamo che:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \text{è crescente} & \text{se } x > -\ln 2 \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{se } x < -\ln 2, \\ f(x) & \text{ha un minimo in} & x = -\ln 2. \end{array}$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = 4e^{2x} - e^x;$$

scrivendo la derivata seconda come $4e^x\left(e^x - \frac{1}{4}\right)$, deduciamo che:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \text{è convessa} & \text{se } x > -\ln 4, \\ f(x) & \text{è concava} & \text{se } x < -\ln 4, \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = -\ln 4. \end{array}$$

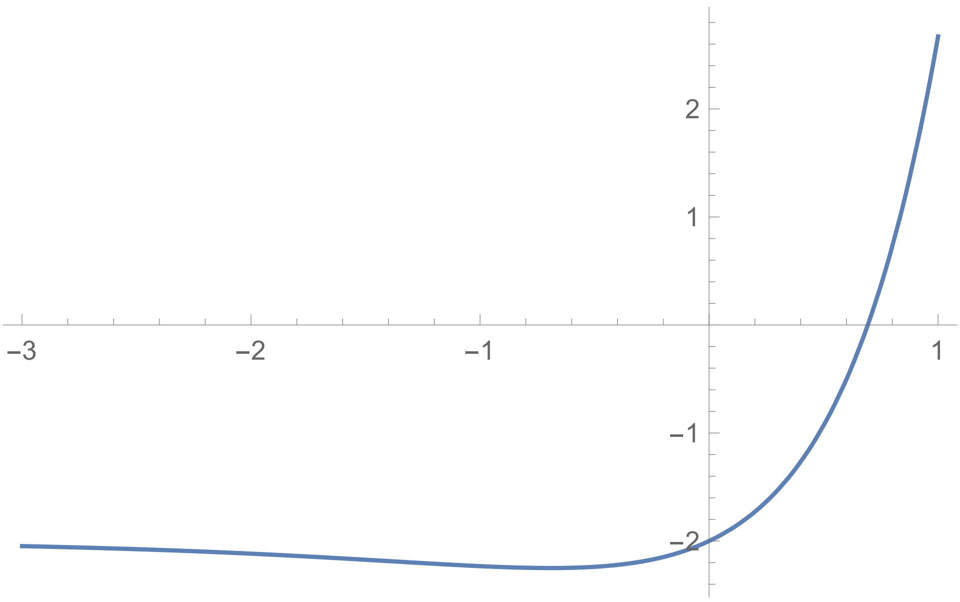

Figura 1: Grafico di $f(x) = e^{2x} - e^x - 2$.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 28/06/21 - foglio 3/4*

Esercizio 4 (5 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^5 \sin\left(x^3\right) \mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con la sostituzione $y = x^3$ si ha $\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x$, dunque integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5 \sin\left(x^3\right) \mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} y \sin y \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3}\left([-y\cos y]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos y \mathrm{d}y \right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\pi + [\sin y]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (5 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k^2+2}-\sqrt{k^2+1}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{k^2+2}-\sqrt{k^2+1}\right).$$

Soluzione: Poiché $n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right) = n\frac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}} \to \frac{1}{2}$, allora dal confronto con $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k^2+2}-\sqrt{k^2+1}\right) \qquad \text{non converge.}$$

La successione $\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$ è positiva, infinitesima e, grazie alla monotonia delle radici e delle potenze, decrescente, dunque dal criterio per serie alternate si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{k^2+2}-\sqrt{k^2+1}\right) \qquad \text{converge.}$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 28/06/21 - foglio 4/4*

Esercizio 6 (5 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^7 = (2 - \imath)(2\imath - 1).$$

Soluzione: Il numero $w = (2 - \imath)(2\imath - 1) = 5\imath$ in forma trigonometrica si scrive come $w = re^{\imath t}$ con $r = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$ e $t = \frac{\pi}{2}$, dunque le sue radici cubiche saranno $z = 5^{\frac{1}{7}} e^{\imath\left(\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}\right)}$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, e cioè:

$$\sqrt[7]{5} e^{\imath\left(\frac{\pi}{14} + k\frac{2}{7}\pi\right)}, \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.