AM110 - Analisi Matematica I (A.A. 2025-26)

Luca Battaglia

(Note integrative del testo *Analisi su $\mathbb{R}$ - guida ai principi dell'analisi matematica* di L. Chierchia)

AVVERTENZA:
Queste note trattano esclusivamente gli argomenti che durante il corso sono stati sviluppati in modo sostanzialmente differente dal testo del Prof. Chierchia. Per tutti gli altri argomenti, che costituiscono la gran parte del programma del corso, il riferimento è lo stesso testo di Chierchia.

Funzioni elementari

Definizione.
*Dati $x > 0, n \in \mathbb{N}$, si definisce la **radice** n-esima di x come*

$$\sqrt[n]{x} := \sup\{t > 0 : t^n < x\}.$$

Proposizione.
L'unico valore di $y > 0$ che verifichi $y^n = x$ è dato da $y = \sqrt[n]{x}$;

Dimostrazione.
Anzitutto sarà sufficiente dimostrare che $y = \sqrt[n]{x}$ è una soluzione di $y^n = x$, perché l'unicità seguirà dal fatto che la funzione $y \mapsto y^n$ è iniettiva.
La proposizione è banalmente vera per $x = 1$ perché otteniamo $\sqrt[n]{1} = \sup(0, 1) = 1$ che è l'unico valore positivo di y per cui $y^n = 1$.
Supponendo ora $x \neq 1$, l'insieme $A := \{t > 0 : t^n < x\}$ è non vuoto perché se $x > 1$ allora $1 \in A$, mentre se $0 < x < 1$ allora $x^n < x$ e dunque $x \in A$. Inoltre, A è superiormente limitato perché se $x > 1$ allora $x^n > x$ e dunque, per la monotonia della funzione potenza x è un maggiorante di A; se invece $0 < x < 1$ allora $t^n < 1$ e dunque, come nel caso precedente, 1 è un maggiorante di A.
Dimostriamo ora che $y := \sup A$ verifica $y^n \geq x$; ciò seguirà facendo vedere che, se per assurdo fosse $y^n < x$, allora $y + \varepsilon \in A$ per qualche $\varepsilon \in (0, 1)$ sufficientemente piccolo, e dunque y non può essere un maggiorante per A. Dalla formula del binomio di Newton si ottiene:

$$(y + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \varepsilon^k = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \varepsilon^k \leq y^n + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \right) \varepsilon,$$

dunque $(y + \varepsilon)^n < x$ scegliendo $\varepsilon < \dfrac{x - y^n}{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k}}$, ossia $y + \varepsilon \in A$.
In modo simile si dimostra che, se $y^n > x$, allora $(y - \varepsilon)^n > x$ per ε sufficientemente piccolo; ciò esclude che y possa essere il minimo dei maggioranti di A, perché anche $y - \varepsilon$ sarebbe un maggiorante più piccolo, e dunque y deve verificare l'equazione $y^n = x$. $\square$

Definizione.
*Dati $x > 1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, si definisce la **potenza** α-esima di x come*

$$x^\alpha := \sup\{x^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha\}.$$

Se $0 < x < 1$, si definisce $x^\alpha := \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\alpha}$; se $x = 1$, si definisce $1^\alpha := 1$.

Osservazione.
La definizione è ben posta perché, se $x > 1$, l'insieme $A := \{x^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha\}$ è non vuoto, in quanto contiene ad esempio $x^{[a]}$, ed è superiormente limitato, in quanto $x^{[a]+1}$ è un maggiorante.

Proposizione.
Valgono le seguenti proprietà:

1. *Se $x > 1$ allora $x^\alpha := \inf\{x^r : r \in \mathbb{Q}, r > \alpha\}$;*
2. *Se $x > 1$ allora $\alpha < \beta \Rightarrow x^\alpha < x^\beta$, se $0 < x < 1$ allora $\alpha < \beta \Rightarrow x^\alpha > x^\beta$;*
3. *$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ per ogni $x > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;*
4. *$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ per ogni $x > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;*
5. *$x^a y^\alpha = (xy)^\alpha$ per ogni $x, y > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione.

1. L'insieme $B := \{x^r : r \in \mathbb{Q}, r > \alpha\}$ è non vuoto e inferiormente limitato, per ragioni analoghe a quelle di A, dunque il suo estremo inferiore è ben definito; inoltre, $a \le b$ per ogni $a \in A, b \in B$ e quindi $x^\alpha := \sup A \le \inf B$, dunque affinché valga l'uguaglianza sarà sufficiente mostrare che per ogni $t > x^\alpha$ esiste $b \in B$ tale che $x^\alpha < b < t$, cioè $x^\alpha < x^r < t$ per qualche $r \in \mathbb{Q}, r > \alpha$. Scegliendo, grazie alla proprietà archimedea, $q \in \mathbb{N}$ tale che $q > \dfrac{x-1}{\frac{t}{x^\alpha} - 1}$, dalla disuguaglianza di Bernoulli avremo anche $\left(\dfrac{t}{x^\alpha}\right)^q \ge 1 + \left(\dfrac{t}{x^\alpha} - 1\right) q > x$, ossia $x^{\alpha q} < \dfrac{t^q}{x}$; preso poi $p := \max\{n \in \mathbb{Z} : x^n \le x^{\alpha q}\}$, avremo
$$x^{\alpha q} < x^{p+1} \le x^{\alpha q + 1} < t^q,$$
cioè $x^\alpha < x^r < t$ per $r = \dfrac{p+1}{q} \in \mathbb{Q}$.
2. Sarà sufficiente mostrare la disuguaglianza nel caso $x > 1$, che si estenderà a $0 < x < 1$ grazie alla definizione. Fissati α, β con $\alpha < \beta$, per la densità dei razionali posso trovare $r, s \in \mathbb{Q}$ tali che $\alpha < r < s < \beta$; per la definizione di estremi superiore e inferiore e per il punto precedente avremo $x^\alpha \le x^r$ e $x^s \le x^\beta$, mentre dalla monotonia delle potenze con esponente razionale deduciamo che $x^r < x^s$, da cui $x^\alpha < x^\beta$.
3. Per definizione di estremo superiore, per ogni $t < x^\alpha, s < x^\beta$ esistono $r, q \in \mathbb{Q}$ tali che $r < \alpha, q < \beta$ e $x^r > t, x^q > s$; dunque, dalla proprietà delle potenze con esponente razionale e dal fatto che $r + q \in \mathbb{Q}, r + q < \alpha + \beta$ si ottiene che
$$ts < x^q x^r = x^{q+r} \le x^{\alpha+\beta}.$$
Poiché la disuguaglianza è vera per ogni $t < x^\alpha$, allora avremo $x^\alpha s \le x^{\alpha+\beta}$ per ogni $s < x^\beta$, cioè $x^\alpha x^\beta \le x^{\alpha+\beta}$; ragionando in modo analogo con le caratterizzazioni di x^α, x^β attraverso l'estremo inferiore viste in precedenza, si ottiene $x^\alpha x^\beta \ge x^{\alpha+\beta}$, dunque deve valere l'uguaglianza.

4. 5. Analoghe alla 3.

$\square$

Definizione.
*Dati $x > 0, a > 1$, si definisce il **logaritmo** in base a di x come*
$$\log_a x := \sup\left\{t \in \mathbb{R} : a^t < x\right\}.$$
Se $0 < a < 1$, si definisce $\log_a x := -\log_{\frac{1}{a}} x$.

Proposizione.
L'unico valore di $y \in \mathbb{R}$ che verifichi $a^y = x$ è dato da $y = \log_a x$;

Dimostrazione.
Anzitutto, è sufficiente considerare il caso $a > 1$ ed estenderlo al caso $0 < a < 1$ grazie alla definizione. Inoltre, come per le radici, grazie all'iniettività della funzione esponenziale è sufficiente dimostrare che $a^{\log_a x} = x$, il che è ovvio per $x = 1$ perché $\log_a 1 := \sup(-\infty, 0) = 0$.
Se $x > 1$, l'insieme $A := \left\{t \in \mathbb{R} : a^t < x\right\}$ è non vuoto perché $0 \in A$; inoltre, è superiormente limitato perché se $t \in \mathbb{N}, t \geq \dfrac{x-1}{a-1}$ allora, dalla disuguaglianza di Bernoulli, $a^t \geq 1 + (a-1)t \geq x$ e dunque $t \notin A$. Se invece $0 < x < 1$, avremo $t \in A$ se $t \in \mathbb{Z}, t < -\dfrac{\frac{1}{x}-1}{a-1} \in A$ perché, ancora per Bernoulli, $a^t = \dfrac{1}{a^{-t}} \leq \dfrac{1}{1-(a-1)t} < x$; infine, 0 è un maggiorante di A perché se $t \geq 0$ allora $a^t \geq 1 \geq x$.
Come per le radici, sarà sufficiente escludere che $y := \sup A$ verifichi $a^y < x$ e $a^y > x$. Se fosse $a^y < x$, allora avrei $a^{y+\varepsilon} < x$ per $\varepsilon > 0$ che verifichi $a^\varepsilon < \dfrac{x}{a^s}$, che può essere trovato ad esempio tra i razionali come nel punto 1. della proposizione precedente; ciò è in contraddizione con la definizione di maggiorante. In modo simile, se $a^y > x$, allora $a^{y-\varepsilon} > x$ per $\varepsilon > 0$ che verifichi $a^\varepsilon < \dfrac{a^y}{x}$, contraddicendo il fatto che y è il più piccolo dei maggioranti. $\square$

Limiti e continuità

Proposizione.
Valgono i seguenti limiti notevoli:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^a n}{n^b} = 0$ *per ogni* $a, b > 0$;
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{\log(n^n)} = 1$;
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$;
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Dimostrazione.

1. Posto $l_n := \log n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, il limite equivale a $\dfrac{l_n^a}{(e^b)^{l_n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$: se $a = \dfrac{1}{2}$, applicando la disuguaglianza di Bernoulli al denominatore otteniamo
$$0 \leq \frac{\sqrt{l_n}}{(e^b)^{l_n}} \leq \frac{\sqrt{l_n}}{1+(e^b-1)\,l_n} \leq \frac{\sqrt{l_n}}{(e^b-1)\,l_n} = \frac{1}{(e^b-1)}\frac{1}{\sqrt{l_n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
dunque concludiamo applicando il Teorema del confronto. Il caso $a \in \mathbb{N}$ si può dedurre dal caso $a = \dfrac{1}{2}$ utilizzando il fatto che l'operazione di limite commuta con il prodotto e nel caso generale si può utilizzare la funzione parte intera, come per l'altro limite notevole $\dfrac{n^a}{b^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

2. Dalla doppia disuguaglianza $\left(\frac{n}{e}\right)^n e \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n en$ segue che:

$$\begin{aligned}
\frac{\log(n!)}{\log(n^n)} &\leq \frac{\log\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n en\right)}{\log(n^n)} = \frac{(n+1)\log n - (n-1)}{n\log n} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1-\frac{1}{n}}{\log n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1, \\
\frac{\log(n!)}{\log(n^n)} &\geq \frac{\log\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n e\right)}{\log(n^n)} = \frac{n\log n - (n-1)}{n\log n} = 1 - \frac{1-\frac{1}{n}}{\log n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1;
\end{aligned}$$

la conclusione segue poi dal Teorema del confronto.

3. Dalle disuguaglianze suddette e dal confronto tra infiniti segue che

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{en}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

e si conclude nuovamente grazie al Teorema del confronto.

4. Per $n \geq 2ae$, cioè definitivamente, varrà la disuguaglianza

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \left(\frac{ae}{n}\right)^n e \leq \frac{1}{e2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

5. Dalla disuguaglianza geometrica $\sin x < x < \tan x$ per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ segue, utilizzando la disparità delle funzioni seno e tangente e il caso banale $x = 0$, che

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

dalla prima disuguaglianza segue che $\sin x \underset{x\to 0}{\to} 0$, e da quest'ultima che $\cos x \underset{x\to 0}{\to} 1$ perché

$$1 \geq \cos x \geq \cos^2 x = 1 - \sin x \cdot \sin x \underset{x\to 0}{\to} 1.$$

Possiamo dunque riscrivere le disuguaglianze precedenti, sfruttando il segno delle funzioni nell'intervallo, come

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x \underset{x\to 0}{\to} 1.$$

6. Segue del punto precedente e dal fatto, appena dimostrato, che $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

7. Segue scrivendo

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}}{x^2} = \frac{1}{1+\cos x}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{1+\cos x}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{1+1}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Proposizione.
Le seguenti funzioni sono continue sul loro insieme di definizione:

1. $f(x) = a^x$ *per ogni* $a > 0$;
2. $f(x) = \sin x$;
3. $f(x) = \cos x$;
4. $f(x) = x^a$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

1. Anzitutto, è sufficiente mostrare la continuità nel caso $a > 1$, perché per $0 < a < 1$ sarà sufficiente scrivere $a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$, con $\frac{1}{a} > 1$, e usare la continuità del quoziente tra funzioni continue, mentre il caso $a = 1$ è banale. Per dimostrare la continuità in $x_0 = 0$, facciamo vedere che $a^x \underset{x\to 0}{\to} 0$, ossia, dal Teorema ponte, che se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ allora $a^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$; inoltre, poiché $a^{-x_n} = \frac{1}{a^{x_n}}$, invocando nuovamente la continuità dei quozienti sarà sufficiente restringerci al caso $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0^+$. Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0^+$, allora $y_n := \frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$: se $y_n \in \mathbb{N}$, allora $\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{y_n}} = 1$ perché è un caso particolare del limite notevole $\sqrt[n]{a} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$; viceversa, è sufficiente scrivere $[y_n] \le y_n \le [y_n] + 1$ e applicare tale limite notevole alle successioni di interi positivi $[y_n], [y_n] + 1$ e successivamente il Teorema del confronto. Se $x_0 \ne 0$ allora, per quanto appena visto,
$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} \overset{\left(y=x-x_0 \underset{x\to x_0}{\to} 0\right)}{=} a^{x_0} \lim_{y\to 0} a^y = a^{x_0}.$$

2. Dai limiti notevoli con seno e coseno segue che $\sin x \underset{x\to 0}{\to} 0$ e $\cos x \underset{x\to 0}{\to} 1$, cioè che entrambe le funzioni sono continue in $x_0 = 0$; per $x_0 \ne 0$, dalla formula di addizione per il seno segue che
$$\sin x = \sin(x_0)\cos(x - x_0) + \cos(x_0)\sin(x - x_0) \underset{x\to x_0}{\to} \sin(x_0) \cdot 1 + \cos(x_0) \cdot 0 = \sin(x_0).$$

3. Il caso $x_0 = 0$ è stato appena dimostrato, mentre il caso $x_0 \ne 0$ segue, come nel punto precedente, dalla formula di addizione per il coseno
$$\cos x = \cos(x_0)\cos(x - x_0) - \sin(x_0)\sin(x - x_0).$$

4. Dalla continuità delle funzioni esponenziale e logaritmo segue che
$$x^a = e^{\log(x^a)} = e^{a \log x} \underset{x\to x_0}{\to} e^{a \log x_0} = x_0^a.$$

□

Teorema (di Weierstrass)**.**
Se $f \in C([a, b])$, allora ha un massimo e un minimo, cioè esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Dimostrazione.
Sarà sufficiente dimostrare l'esistenza del massimo di f, perché l'esistenza del minimo seguirà dall'esistenza del massimo per $-f$.
Per una delle caratterizzazioni dell'estremo superiore, esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in $[a, b]$ tale che $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} M := \sup_{[a,b]} f$. Suddividiamo ricorsivamente l'intervallo $[a, b]$ in sotto-intervalli $[a_n, b_n]$ in base al seguente criterio:
$$a_n := \begin{cases} a & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} & \text{se } n \ge 2, N_n := \left\{k \in \mathbb{N} : a_{n-1} \le x_k \le \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right\} \text{ è infinito} \\ \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} & \text{se } n \ge 2, N_n \text{ è finito} \end{cases},$$
$$b_n := \begin{cases} b & \text{se } n = 1 \\ \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} & \text{se } n \ge 2, N_n := \left\{k \in \mathbb{N} : a_{n-1} \le x_k \le \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right\} \text{ è infinito} \\ b_{n-1} & \text{se } n \ge 2, N_n \text{ è finito} \end{cases}.$$

In questo modo, avremo ottenuto, come nella dimostrazione del Teorema di esistenza degli zeri, due successioni a_n, b_n monotone e limitate che convergono allo stesso valore $x_0 \in [a,b]$. Inoltre, per costruzione, il sottoinsieme dei naturali

$$N'_n := \{k \in \mathbb{N} : a_n \leq x_k \leq b_n\}$$

è infinito; è possibile dunque definire ricorsivamente una successione strettamente crescente di interi positivi $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \ldots$ tali che $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$ perché, fissato k_n, avremo $N'_n \cap (k_n, +\infty) \neq \emptyset$.
Per il Teorema del confronto, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0$ e inoltre, per la continuità di f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$; del resto, essendo strettamente crescente, avremo $k_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ e dunque, dal Teorema ponte per successioni, $f(x_{k_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} M$. Dovrà essere quindi necessariamente $f(x_0) = M = \sup\limits_{[a,b]} f$, cioè $f(x_0) = \max\limits_{[a,b]} f$ e quindi f ha un massimo. $\square$

Derivate

Proposizione.
Le seguenti funzioni sono derivabili sui rispettivi insiemi:

1. $f(x) = x^n$ *su* $A = \mathbb{R}$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *con* $f'(x) = nx^{n-1}$;
2. $f(x) = \sin x$ *su* $A = \mathbb{R}$, *con* $f'(x) = \cos x$;
3. $f(x) = \cos x$ *su* $A = \mathbb{R}$, *con* $f'(x) = -\sin x$;
4. $f(x) = \tan x$ *su* $A = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, *con* $f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;
5. $f(x) = \arcsin x$ *su* $A = (-1,1)$, *con* $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
6. $f(x) = \arccos x$ *su* $A = (-1,1)$, *con* $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. $f(x) = \arctan x$ *su* $A = \mathbb{R}$ *con* $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Dimostrazione.

1. Si procede per induzione: il caso $n = 1$ è stato dimostrato a lezione, per $n \geq 2$ è sufficiente scrivere $x^{n+1} = x \cdot x^n$ e applicare la regola di Leibniz per la derivazione del prodotto;
2. Dalla formula di addizione del seno scriviamo

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} &= \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{2} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} \\ &\underset{h\to0}{\to} \sin x_0 \cdot 0 + \cos x_0 \cdot 1 \\ &= \cos x_0, \end{aligned}$$

grazie ai limiti notevoli

$$\frac{\sin h}{h} \underset{h\to0}{\to} 1, \qquad \frac{\cos h - 1}{h} = -h\frac{1-\cos h}{h^2} \underset{h\to0}{0} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

3. Analoga al punto precedente, usando la formula di addizione del coseno

$$\cos(x_0+h) = \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h.$$

4. Dalla regola di derivazione per il quoziente segue che
$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$
5. Dalla regola di derivazione per l'inversa segue che
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
perché $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ per ogni $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Analoga al punto precedente, perché $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
7. Dalla regola di derivazione per il quoziente segue che
$$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Primitive

Definizione.
Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, soddisfa la ***proprietà del valore intermedio*** *se, presi comunque $a, b \in I$ con $a < b$ e y strettamente compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, esiste un $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$.*

Osservazione.

1. *Ogni $f \in C(I)$ soddisfa la proprietà del valore intermedio, grazie al Teorema dei valori intermedi.*
2. *Una funzione che ha una discontinuità eliminabile o di salto non soddisfa la proprietà del valore intermedio: infatti, se $L := \lim_{x\to x_0^-} f(x) < f(x_0)$, allora per qualche $\delta > 0$ avrò $f(x) < \frac{L + f(x_0)}{2}$ se $x_0 - \delta < x < x_0$, dunque $\frac{L + f(x_0)}{2}$ è compreso tra $f(x)$ e $f(x_0)$ ma non è immagine di nessun punto in $[x, x_0]$; si ragiona in modo simile negli altri casi in cui i limiti laterali non coincidono con il valore della funzione nel punto.*

Teorema (di Darboux)**.**
Se $F : I \to \mathbb{R}$ è derivabile allora F' soddisfa la proprietà del valore intermedio su I.
In altre parole, se una funzione ha una primitiva su un intervallo, allora deve soddisfare la proprietà del valore intermedio.

Corollario.
Le funzioni con discontinuità eliminabili o di salto non ammettono primitiva.

Dimostrazione.
Fissati $a, b \in I$ con $a < b$, non è restrittivo supporre $F'(a) < F'(b)$, a meno di sostituire F con $-F$; preso dunque $y \in (F'(a), F'(b))$, sarà dunque sufficiente trovare un punto critico per $G(x) := F(x) - yx$, la cui derivata è $G'(x) = F'(x) - y$.
Essendo G continua su $[a, b]$, per il Teorema di Weierstrass avrà un punto di minimo x_0; sarà quindi sufficiente dimostrare che $x_0 \in (a, b)$, perché ciò implicherà che $G'(x_0) = 0$, per il Teorema di Fermat. Se il punto di minimo fosse $x_0 = a$, allora $G(x) \geq G(a)$ per ogni $x \in [a, b]$ e dunque

$\dfrac{G(x)-G(a)}{x-a} \geq 0$, da cui, passando al limite per x che tende ad a, $G'(a) \geq 0$, contraddicendo il fatto che $G'(a) = F'(a) - y < 0$; allo stesso modo, se fosse $x_0 = b$, allora $\dfrac{G(x)-G(b)}{x-b} \leq 0$ e dunque $G'(b) \leq 0$, in contraddizione con $G'(b) = F'(b) - y > 0$. Dunque, l'unica possibilità è $x_0 \in (a, b)$, il che dimostra il teorema. □

Esempio.
La funzione $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \textit{se } x \neq 0 \\ a & \textit{se } x = 0 \end{cases}$ *, pur non essendo continua per nessun valore di* $a \in \mathbb{R}$*, soddisfa la proprietà del valore intermedio su* $\mathbb{R}$ *se* $|a| \leq 1$*: ciò segue dal fatto che esistono successioni* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0^-, y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0^+$ *tali che* $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} a, f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\to} a$*; inoltre, per* $a = 0$*,* f *ha una primitiva data da* $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \textit{se } x \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases}$ *.*

Equazioni differenziali

Proposizione.
Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervalli,* $g \in C(I)$*,* $f : J \to \mathbb{R}$ *derivabile con* $f' \in C(J)$ *e* $t_0 \in I, x_0 \in J$ *fissati. Allora, la soluzione* $x(t) : I \to J$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t))g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è *<u>unica</u>.*

Dimostrazione.
Date $x_1(t), x_2(t)$ soluzioni del problema di Cauchy, sarà sufficiente che $y(t) := x_1(t) - x_2(t)$ è identicamente nulla. $y(t)$ risolve l'equazione differenziale lineare

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)h(t)g(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

con

$$h(t) := \begin{cases} \dfrac{f(x_1(t)) - f(x_2(t))}{x_1(t) - x_2(t)} & \text{se } x_1(t) \neq x_2(t) \\ f'(x_1(t)) & \text{se } x_1(t) = x_2(t) \end{cases},$$

che è continua per le ipotesi su f; dunque, l'unica soluzione si può trovare con il metodo risolutivo per le equazioni lineari ed è

$$y(t) = y(t_0)e^{\int_{t_0}^t h(s)f(s)\mathrm{d}s} = 0.$$

□