Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/09/23 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left((n^2+a)!\right) - \ln\left((n^2+a-2)!\right)}{\ln((2n+b)!) - \ln((2n+b-1)!)}, \qquad a, b = 0, 1.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left((n^2+a)!\right) - \ln\left((n^2+a-2)!\right)}{\ln((2n+b)!) - \ln((2n+b-1)!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{(n^2+a)!}{(n^2+a-2)!}}{\ln \frac{(2n+b)!}{(2n+b-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left((n^2+a)\left(n^2+a-1\right)\right)}{\ln(2n+b)} \\
= &\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(n^4\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{a-1}{n^2}\right)\right)}{\ln\left(n\left(2+\frac{b}{n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\ln n + \ln\left(1+\frac{a}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{a-1}{n^2}\right)}{\ln n + \ln\left(2+\frac{b}{n}\right)} \\
= &\lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{\ln\left(1+\frac{a}{n^2}\right)}{\ln n} + \frac{\ln\left(1+\frac{a-1}{n^2}\right)}{\ln n}}{1 + \frac{\ln\left(2+\frac{b}{n}\right)}{\ln n}} = 4.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - \arcsin(\arcsin x)}{\tan(\tan x) - \arctan(\arctan x)}.$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) = x + o(x), \qquad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) = x + o(x),$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) = x + o(x), \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) = x + o(x)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - \arcsin(\arcsin x)}{\tan(\tan x) - \arctan(\arctan x)} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) - \frac{(x+o(x))^3}{6} + o\left((x+o(x))^3\right) - \left(\left(x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \frac{(x+o(x))^3}{6} + o\left((x+o(x))^3\right)\right)}{\left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) + \frac{(x+o(x))^3}{3} + o\left((x+o(x))^3\right) - \left(\left(x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) - \frac{(x+o(x))^3}{3} + o\left((x+o(x))^3\right)\right)} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)}{\left(x + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right) - \left(x - \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)}{\frac{4}{3}x^3 + o\left(x^3\right)} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(\arcsin x) - \sin(\sin x)}{\tan(\tan x) - \arctan(\arctan x)} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(\tan x) - \arctan(\arctan x)}{\sin(\sin x) - \arcsin(\arcsin x)} = -2,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(\arctan x) - \tan(\tan x)}{\sin(\sin x) - \arcsin(\arcsin x)} = 2.$$

---

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/09/23 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(ax)}{\sqrt{2} - \cos(ax)} \qquad a = 2, 3, 4, 5,$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: Poiché il denominatore non si annulla mai, la funzione è definita per ogni valore reale, cioè il dominio è

$$(-\infty, +\infty).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione è DISPARI e PERIODICA di periodo $\dfrac{2\pi}{a}$.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché il denominatore è sempre positivo, studiando il segno del numeratore si ottiene che (restringendosi a $\left[-\dfrac{\pi}{a}, \dfrac{\pi}{a}\right)$):

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{a}\right), \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{a}, 0\right); \end{aligned}$$

inoltre, $f(0) = 0$ e f si annulla in $x = 0, -\dfrac{\pi}{a}$, dunque:

$$\begin{aligned} f(x) &\qquad \text{interseca l'asse verticale in } (0,0), \\ f(x) &\qquad \text{interseca l'asse orizzontale in } (0,0), \left(-\frac{\pi}{a}, 0\right). \end{aligned}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\nexists \lim_{x \to \pm\infty} f(x),$$

dunque in particolare non ci sono asintoti.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile in ogni punto del dominio e la sua derivata è:

$$f'(x) = \frac{a\left(\sqrt{2}\cos(ax) - 1\right)}{\left(\sqrt{2} - \cos(ax)\right)^2}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/09/23 - foglio 3/5*

Soluzione: Studiando il segno di f' si ottiene:

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{4a}, \frac{\pi}{4a}\right), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in \left[-\frac{\pi}{a}, -\frac{\pi}{4a}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4a}, \frac{\pi}{a}\right), \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & x = \frac{\pi}{4a}, \\ f(x) & \text{ha un minimo in} & x = -\frac{\pi}{4a}. \end{array}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

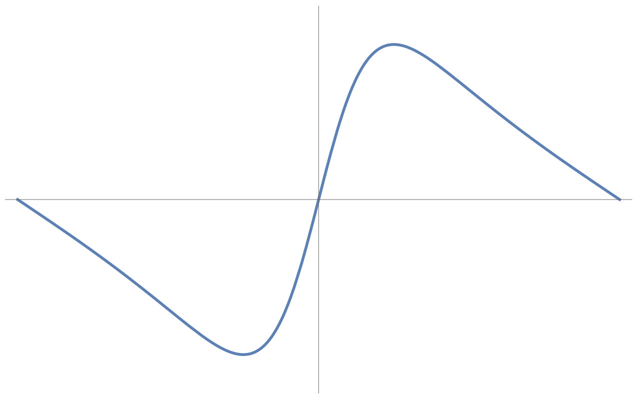
$$f''(x) = \frac{-\sqrt{2}a^2 \sin(ax)\cos(ax)}{\left(\sqrt{2} - \cos(ax)\right)^3},$$

studiandone il segno otteniamo che:

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{2a}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{a}\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{a}, -\frac{\pi}{2a}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2a}\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = -\frac{\pi}{a}, -\frac{\pi}{2a}, 0, \frac{\pi}{2a}. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/09/23 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x^a \ln\left(x^{2a+2}+1\right) \mathrm{d}x, \qquad a = 1, 2, 3, 4.$$

Soluzione: Con il cambio di variabile $y = x^{a+1}$ e integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^a \ln\left(x^{2a+2}+1\right) \mathrm{d}x &= \frac{1}{a+1}\int_0^1 \ln\left(y^2+1\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{a+1}\left(\left[y\ln\left(y^2+1\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2y^2}{y^2+1}\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{a+1}\left(\ln 2 - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{a+1}\left(\ln 2 - \left[2y - 2\arctan y\right]_0^1\right) \\
&= \frac{\ln 2}{a+1} - \frac{2}{a+1} + \frac{\pi}{2a+2}.
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/09/23 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(a\ln\left(1+\frac{b}{\sqrt{k}}\right)-\frac{ab}{\sqrt{k}}+\frac{ab^2}{2k}\right), \qquad a=2,1, b=3,2;$

Soluzione: Dallo sviluppo di Taylor $\ln\left(1+\frac{b}{\sqrt{n}}\right)=\frac{b}{\sqrt{n}}-\frac{b^2}{2n}+\frac{b^3}{3n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} n^{\frac{3}{2}}\left(a\ln\left(1+\frac{b}{\sqrt{n}}\right)-\frac{ab}{\sqrt{n}}+\frac{ab^2}{2n}\right) &= n^{\frac{3}{2}}\left(a\left(\frac{b}{\sqrt{n}}-\frac{b^2}{2n}+\frac{b^3}{3n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)-\frac{ab}{\sqrt{n}}+\frac{ab^2}{2n}\right) \\ &= \frac{ab^3}{3}+o(1) \\ &\underset{n\to\infty}{\to} \frac{ab^3}{3}; \end{aligned}$$

dunque, dal criterio degli infinitesimi con $p=\frac{3}{2}$ otteniamo che la serie

CONVERGE.

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(a\ln\left(1+\frac{b}{\sqrt{k}}\right)-\frac{ab}{\sqrt{k}}+\frac{ab^2}{2k}\right), \qquad a=2,1, b=3,2;$

Soluzione: Dal punto precedente la serie converge assolutamente, dunque

CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^5=\overline{1+i}-(1-i)(2+i).$$

Soluzione: Poiché $\overline{1+i}-(1-i)(2+i)=1-i-(3-i)=-2=2e^{i\pi}$, le soluzioni sono

$$z=\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k=0,1,2,3,4.$$

Analogamente,

$$z^5=\overline{1+i}-(1+i)(2-i)=-2-2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi} \iff z=2^{\frac{3}{10}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\pi+\frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k=0,1,2,3,4;$$

$$z^5=\overline{1-i}-(1-i)(2+i)=-2+2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} \iff z=2^{\frac{3}{10}}e^{i\left(\frac{3}{20}\pi+\frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k=0,1,2,3,4;$$

$$z^5=\overline{1-i}-(1+i)(2-i)=-2=2e^{i\pi} \iff z=\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k=0,1,2,3,4;$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.