Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 28/07/23 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{(\ln n)^{a\ln n}}, \qquad a = 2, 3, 4, 5.$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{(\ln n)^{a\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\ln(n^a)}}{e^{\ln((\ln n)^{a\ln n})}} = \lim_{n\to\infty} e^{a\ln n - a\ln n(\ln\ln n)} = e^{a\lim_{n\to\infty}(1-\ln\ln n)(\ln n)} = e^{-\infty} = 0.$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}\ln(1+x) - x\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}\ln(1+x) - x\sqrt{1+x}}.$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x), \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right), \qquad \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x),$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}\ln(1+x) - x\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}\ln(1+x) - x\sqrt{1+x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) - x\left(1+\frac{x}{3}+o(x)\right)}{\left(1+\frac{x}{3}+o(x)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) - x\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right) - \left(x+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right) - \left(x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)}{-\frac{2}{3}x^2+o\left(x^2\right)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Allo stesso modo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}\ln(1+x)}{\sqrt[3]{1+x}\ln(1+x) - x\sqrt{1+x}} &= -\frac{1}{2} \\
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}\ln(1+x) - x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}\ln(1+x) - x\sqrt[3]{1+x}} &= 2 \\
\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}\ln(1+x) - x\sqrt[3]{1+x}} &= -2
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 28/07/23 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = a\arctan(x+1) - a\arctan(x-1), \qquad a = 2, 3, 4, 5,$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per ogni valore reale, cioè il dominio è

$$(-\infty, +\infty).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: Essendo l'arcotangente dispari, la funzione f è PARI e non è periodica.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Dalla monotonia dell'arcotangente segue che

$$f(x) \quad > 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, +\infty);$$

inoltre, $f(0) = \frac{a}{2}\pi$, dunque

$$\begin{aligned} &f(x) \qquad \text{non interseca l'asse verticale,} \\ &f(x) \qquad \text{non interseca l'asse orizzontale in } \left(0, \frac{a}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

dunque $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile in tutto il suo dominio e la derivata è:

$$f'(x) = \frac{-4ax}{((x+1)^2+1)\,((x-1)^2+1)}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 28/07/23 - foglio 3/5*

Soluzione: Studiando il segno di f' si ottiene:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in (-\infty, 0), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in (0, +\infty), \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & x = 0. \end{array}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

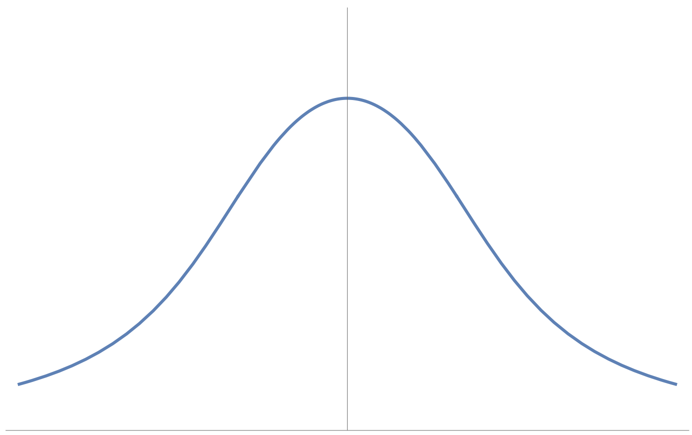
$$f'(x) = \frac{a\left(12x^4 - 16\right)}{\left((x+1)^2+1\right)^2\left((x-1)^2+1\right)^2},$$

studiandone il segno otteniamo che:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(-\sqrt[4]{\frac{4}{3}}, \sqrt[4]{\frac{4}{3}}\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}}. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 28/07/23 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\frac{\ln \pi - \ln 3}{a}}^{\frac{\ln \pi - \ln 2}{a}} \frac{e^{ax}}{1+\sin(e^{ax})} \mathrm{d}x, \qquad a = 5, 4, 3, 2.$$

Soluzione: Con i cambi di variabile $y = e^{ax}, t = \tan \frac{y}{2}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\ln \pi - \ln 3}{a}}^{\frac{\ln \pi - \ln 2}{a}} \frac{e^{ax}}{1+\sin(e^{ax})} \mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{a}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{(t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{a}\left[-\frac{1}{t+1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \\
&= \frac{2}{a}\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{a}.
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 28/07/23 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k^a + k^b}}, \qquad a = 3, 2, b = 1, 0;$

Soluzione: Poiché

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{a}{3}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^a + n^b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{a}{3}}}{\sqrt[3]{n^a + n^b}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^a+n^b}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^a+n^b}}} = 1,$$

dal criterio degli infinitesimi con $p = \frac{a}{3} \le 1$ otteniamo che la serie

NON CONVERGE.

(3 punti) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k^a + k^b}}, \qquad a = 3, 2, b = 1, 0;$

Soluzione: Poiché la successione $\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^a + n^b}}$ è positiva, infinitesima e decrescente, dal criterio per serie alternate deduciamo che la serie

CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^8 + z^4 - 6 = 0.$$

Soluzione: Scrivendo $z^8 + z^4 - 6 = \left(z^4 - 2\right)\left(z^4 + 3\right)$, le soluzioni sono quelle di $z^4 = 2 = 2e^{i0}$ e di $z^4 = -3 = 3e^{i\pi}$, cioè

$$z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{k}{2}\pi}, z = \sqrt[4]{3} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Allo stesso modo,

$$z^8 - z^4 - 6 = \left(z^4 + 2\right)\left(z^4 - 3\right) = \left(z^4 - 2e^{i\pi}\right)\left(z^4 - 3e^{i0}\right) = 0 \iff z = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)}, z = \sqrt[4]{3} e^{i\frac{k}{2}\pi}, \ k = 0, 1, 2, 3;$$

$$z^8 + 5z^4 + 6 = \left(z^4 - 1\right)\left(z^4 + 6\right) = \left(z^4 - 1e^{i0}\right)\left(z^4 - 6e^{i\pi}\right) = 0 \iff z = e^{i\frac{k}{2}\pi}, z = \sqrt[4]{6} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)}, \ k = 0, 1, 2, 3;$$

$$z^8 - 5z^4 + 6 = \left(z^4 + 1\right)\left(z^4 - 6\right) = \left(z^4 - 1e^{i\pi}\right)\left(z^4 - 6e^{i0}\right) = 0 \iff z = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)}, z = \sqrt[4]{6} e^{i\frac{k}{2}\pi}, \ k = 0, 1, 2, 3.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.