Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 03/07/23 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty} e^{2an}\ln\left(\cos e^{-an}\right), \qquad a=5,4,3,2.$$

Soluzione: Poiché $e^{-an} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, allora

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} e^{2an}\ln\left(\cos e^{-an}\right) &= \lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to0} -\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\frac{1-\cos x}{x^2} \\ &= -\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2\sin^2 x}-\frac{1}{\sin\left(2x^2\right)}\right).$$

Soluzione: Utilizzando lo sviluppo di Taylor

$$\sin x = x+o(x) = x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2\sin^2 x}-\frac{1}{\sin\left(2x^2\right)}\right) &= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\left(2x^2\right)-2\sin^2 x}{2\left(\sin^2 x\right)\sin^2\left(2x^2\right)}\right) \\ &= \lim_{x\to0}\frac{\left(\left(2x^2\right)-\frac{\left(2x^2\right)^3}{6}+o\left(\left(2x^2\right)^3\right)\right)-2\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^2}{2(x+o(x))^2\left(2x^2+o\left(x^2\right)\right)} \\ &= \lim_{x\to0}\frac{\left(2x^2+o\left(x^4\right)\right)-2\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)\right)}{4x^4+o\left(x^4\right)} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)}{4x^4+o\left(x^4\right)} \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Allo stesso modo,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2\tan^2 x}-\frac{1}{\tan\left(2x^2\right)}\right)=-\frac{1}{3}, \qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2\arcsin^2 x}-\frac{1}{\arcsin\left(2x^2\right)}\right)=-\frac{1}{6},$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2\arctan^2 x}-\frac{1}{\arctan\left(2x^2\right)}\right)=\frac{1}{3}.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 03/07/23 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2ax + a^2}, \qquad a = 2, 3, 4, 5,$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per i valori che non annullano il denominatore, che può essere scritto come $(x+a)^2$, e cioè

$$(-\infty, -a) \cup (-a, +\infty).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione non è pari né dispari né periodica.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché il denominatore non è mai negativo, il segno di f è lo stesso del numeratore, e cioè:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in (0, +\infty), \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, -a) \cup (-a, 0); \end{aligned}$$

inoltre, poiché f si annulla solo in 0, allora

$$\begin{aligned} f(x) &\quad \text{interseca l'asse verticale in } (0,0), \\ f(x) &\quad \text{interseca l'asse orizzontale in } (0,0). \end{aligned}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x \to -a^{\pm}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

dunque $x = -a$ è un asintoto verticale e $y = x - 2a$ è un asintoto obliquo, in quanto

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = -2a.$$

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 03/07/23 - foglio 3/5*

Soluzione: La funzione è derivabile in tutto il suo dominio e la derivata è:

$$f'(x) = -\frac{x^3 + 3ax^2}{(x+a)^3}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di f' si ottiene:

$$\begin{array}{ccl} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in \left(-\infty, -\frac{a}{3}\right) \cup (-a, +\infty), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in \left(-\frac{a}{3}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & x = -\frac{a}{3}. \end{array}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

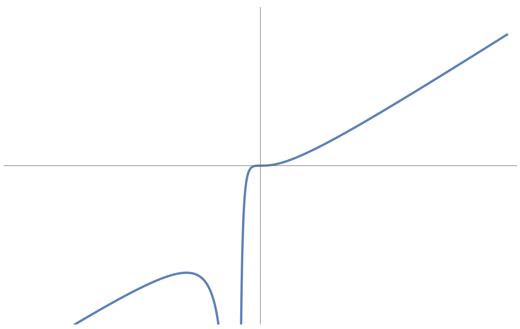
$$f'(x) = \frac{6a^2x}{(x+a)^4},$$

studiandone il segno otteniamo che:

$$\begin{array}{ccl} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in (0, +\infty), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in (-\infty, -a) \cup (-a, 0), \\ f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = 0. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 03/07/23 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{3\pi^2} \cos\sqrt{x+\pi^2}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con il cambio di variabile $y = \sqrt{x+\pi^2}$ e integrando per parti si ottiene:

$$\int_0^{3\pi^2} \cos\sqrt{x+\pi^2}\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} 2x\cos y\mathrm{d}y = [2y\sin y]_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} 2\sin y\mathrm{d}y = [2\cos y]_\pi^{2\pi} = 4.$$

Allo stesso modo,

$$\int_0^{3\pi^2} \sin\sqrt{x+\pi^2}\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} 2y\sin y\mathrm{d}y = [-2x\cos x]_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi} 2\cos x = -6\pi + [2\sin x]_\pi^{2\pi} = -6\pi;$$

$$\int_{\pi^2}^{2\pi^2} \cos\sqrt{x-\pi^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 2y\cos y\mathrm{d}y = [2y\sin y]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin y\mathrm{d}y = [2\cos y]_0^{\pi} = -4;$$

$$\int_{\pi^2}^{2\pi^2} \sin\sqrt{x-\pi^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 2y\sin y\mathrm{d}y = [-2y\cos y]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos y\mathrm{d}y = 2\pi + [2\sin y]_0^{\pi} = 2\pi.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 03/07/23 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\cos k)\ln^2 k}{k\sqrt[a]{k+b}}, \qquad a = 2, 3, b = 1, 2;$

Soluzione: Poiché $n^{1+\frac{1}{2a}} \dfrac{(1-\cos n)\ln^2 n}{n\sqrt[a]{n+b}} = \dfrac{(1-\cos n)\ln^2 n}{\sqrt[a]{\sqrt{n}+\frac{b}{\sqrt{n}}}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, dal criterio degli infinitesimi con $L = 0, p = 1 + \dfrac{1}{2a}$ otteniamo che la serie

CONVERGE.

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(1-\cos k)\ln^2 k}{k\sqrt[a]{k+b}}, \qquad a = 2, 3, b = 1, 2;$

Soluzione: Dal punto precedente la serie converge assolutamente, dunque

CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^7 - z^5 + 2iz^2 - 2i = 0.$$

Soluzione: Poiché $z^7 - z^5 + 2iz^2 - 2i = \left(z^2-1\right)\left(z^5+2i\right) = (z-1)(z+1)\left(z^5+2i\right)$, le soluzioni sono $z = \pm 1$ e le soluzioni di $z^5 = -2i = 2e^{i\frac{3}{2}\pi}$, cioè:

$$z = \pm 1, z = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{3}{10}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Analogamente,

$$z^7 - z^5 - 2iz^2 + 2i = (z-1)(z+1)\left(z^5 - 2i\right) = 0 \iff z = \pm 1, z = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$z^7 - z^5 + 4iz^2 - 4i = (z-1)(z+1)\left(z^5 + 4i\right) = 0 \iff z = \pm 1, z = \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{3}{10}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$z^7 - z^5 - 4iz^2 + 4i = (z-1)(z+1)\left(z^5 - 4i\right) = 0 \iff z = \pm 1, z = \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4;$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.