Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 25/01/22 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{n+a^{-n}}-a^n\right), \qquad a=2,3,4,5.$$

Soluzione: Poiché $a^{-n}\underset{n\to\infty}{\to}0$, allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{n+a^{-n}}-a^n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{a^{-n}}-1}{a^{-n}}=\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^{\pi x}-1}-\frac{1}{\pi\ln(1+x)}\right).$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+o\left(x^2\right)=1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right) \\ \ln(1+x) &= 1+x+o\left(x^2\right)=x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e^{\pi x}-1}-\frac{1}{\pi\ln(1+x)}\right) &= \frac{\pi\ln(1+x)-(e^{\pi x}-1)}{(e^{\pi x}-1)\pi\ln(1+x)} \\ &= \frac{\pi\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-\left(\pi x-\frac{(\pi x)^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{(\pi x+o(x))(\pi x+o(x))} \\ &= \frac{-\frac{\pi}{2}x^2-\frac{\pi^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{\pi^2x^2+o\left(x^2\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}+o(1)}{\pi+o(1)} \\ &\underset{x\to0}{\to} -\frac{1+\pi}{2\pi}; \end{aligned}$$

allo stesso modo,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\pi(e^x-1)}-\frac{1}{\ln(1+\pi x)}\right) &= -\frac{1+\pi}{2\pi}; \\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\pi\ln(1+x)}-\frac{1}{e^{\pi x}-1}\right) &= \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+\pi x)}-\frac{1}{\pi(e^x-1)}\right)=\frac{1+\pi}{2\pi}. \end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 25/01/22 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = e^{\frac{2a}{x^2-a}}, \qquad a = 4, 3, 2, 1$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: Il denominatore non si annulla per $x \neq \pm\sqrt{a}$, dunque il dominio è

$$\left(-\infty, -\sqrt{a}\right) \cup \left(-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right) \cup \left(\sqrt{a}, +\infty\right).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione è pari, perché dipende solo dal quadrato, e non è periodica.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché f è un esponenziale, allora

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in \left(-\infty, -\sqrt{a}\right) \cup \left(-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right) \cup \left(\sqrt{a}, +\infty\right);$$

inoltre, $f(0) = \dfrac{1}{e^2}$ e f non si annulla mai, dunque

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to\pm\sqrt{a}^{\pm}} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\sqrt{a}^{\mp}} f(x) = 0,$$

dunque $y = 1$ è un asintoto orizzontale e $x = \pm\sqrt{a}$ è un asintoto verticale.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = -\frac{4ax}{\left(x^2-a\right)^2} e^{\frac{2a}{x^2-a}}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x)$ si ottiene che, nel caso $+$:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in \left(-\infty, -\sqrt{a}\right) \cup \left(-\sqrt{a}, 0\right), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in \left(0, \sqrt{a}\right) \cup \left(\sqrt{a}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{ha un massimo} & \text{in } x = 0; \end{array}$$

il massimo non è assoluto perché $f(x)$ può tendere a $+\infty$ e a 0.

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 25/01/22 - foglio 3/5*

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

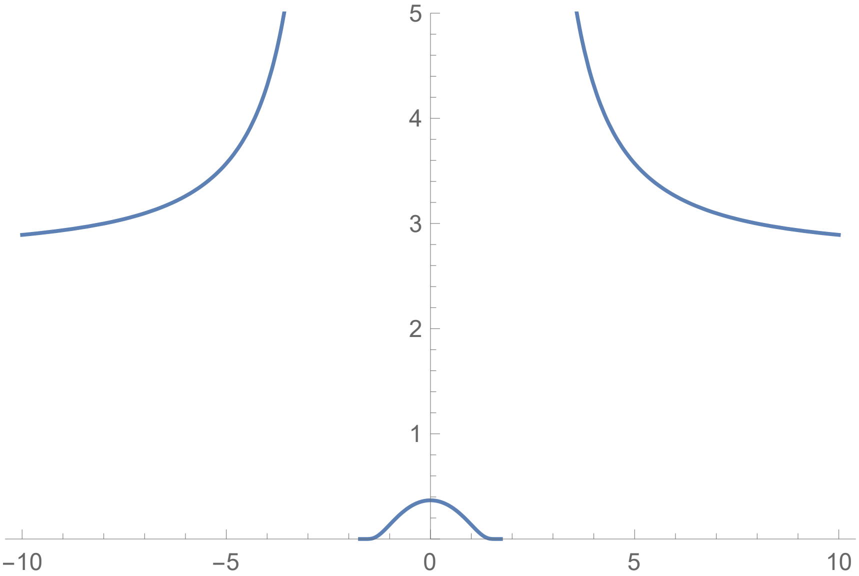
$$f''(x) = \frac{4a\left(3x^4 + 2ax^2 - a^2\right)}{\left(x^2 - a\right)^4} e^{\frac{2a}{x^2-a}},$$

studiandone il segno si deduce che

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in (-\infty, -\sqrt{a}) \cup \left(-\sqrt{a}, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{a}\right) \cup (\sqrt{a}, +\infty), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 25/01/22 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{a\sqrt[3]{x}+1}\mathrm{d}x, \qquad a = 1, 2, 3, 4.$$

Soluzione: Con il cambio di variabile $t = \sqrt[3]{x}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{a\sqrt[3]{x}+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{3y^2}{ay+1}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{3}{a}y - \frac{3}{a^2} + \frac{3}{a^2}\frac{1}{ay+1}\right)\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{3}{a}\frac{y^2}{2} - \frac{3}{a^2}y + \frac{3}{a^2}\ln(ay+1)\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{2a} - \frac{3}{a^2} + \frac{3}{a^3}\ln(a+1) \\
&= 3\ln 2 - \frac{3}{2} \qquad (a=1); \\
&= \frac{3}{8}\ln 2 \qquad (a=2); \\
&= \frac{1}{6} + \frac{2}{9}\ln 2 \qquad (a=3); \\
&= \frac{3}{64}\ln 5 + \frac{3}{16} \qquad (a=4);
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 25/01/22 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k \arctan(a^{-k})}, \qquad a = 5, 4, 3, 2;$

Soluzione: Poiché $\displaystyle\frac{1}{a^n \arctan(a^{-n})} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, la serie non è infinitesima, dunque

NON CONVERGE.

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a^k \arctan(a^{-k})}, \qquad a = 2, 3, 4, 5.$

Soluzione: Come nel caso precedente, la serie non è infinitesima, dunque

NON CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^{10} + 2z^5 - 3 = 0.$$

Soluzione: Scrivendo Scrivendo $z^{10} + 2z^5 - 3 = \left(z^5 - 1\right)\left(z^5 + 3\right)$, le soluzioni saranno quelle di $z^5 = 1 = e^{i\cdot 0}$ e di $z^5 = -3 = 3e^{i\pi}$, cioè

$$z = e^{i\frac{2}{5}k\pi}, \sqrt[5]{3}e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k = 0, \dots, 4;$$

allo stesso modo,

$$0 = z^{10} - z^5 - 2 = \left(z^5 + 1\right)\left(z^5 - 2\right) \iff z = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}k\pi\right)}, \sqrt[5]{3}e^{i\frac{2}{5}k\pi}, \qquad k = 0, \dots, 4;$$

$$0 = z^{10} + z^5 - 2 = \left(z^5 - 1\right)\left(z^5 + 2\right) \iff z = e^{i\frac{2}{5}k\pi}, \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}k\pi\right)}, \qquad k = 0, \dots, 4;$$

$$0 = z^{10} - 2z^5 - 3 = \left(z^5 + 1\right)\left(z^5 - 3\right) \iff z = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}k\pi\right)}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2}{5}k\pi}, \qquad k = 0, \dots, 4.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.