Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/06/22 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+a\sqrt{n}}-\sqrt{n-a\sqrt{n}}\right), \qquad a=1,2,3,4.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+a\sqrt{n}}-\sqrt{n-a\sqrt{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+a\sqrt{n}}-\sqrt{n-a\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+a\sqrt{n}}+\sqrt{n-a\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+a\sqrt{n}}+\sqrt{n-a\sqrt{n}}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+a\sqrt{n}-(n-a\sqrt{n})}{\sqrt{n+a\sqrt{n}}+\sqrt{n-a\sqrt{n}}}\\
&= 2a\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+a\sqrt{n}}+\sqrt{n-a\sqrt{n}}}\\
&= 2a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{a}{\sqrt{n}}}}\\
&= a.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{\arcsin x}-e^{\tan x}}.$$

Soluzione: Dallo sviluppo di Taylor

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right), \qquad \arcsin x = x+o(x) = x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right), \qquad \tan x = x+o(x) = x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3}{e^{\arcsin x}-e^{\tan x}}\\
= \;&\frac{x^3}{1+x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)+\frac{(x+o(x))^2}{2}+\frac{(x+o(x))^3}{6}+o\left(x^3\right)-\Big(1+x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)+\frac{(x+o(x))^2}{2}+\frac{(x+o(x))^3}{6}+o\left(x^3\right.}\\
= \;&\frac{x^3}{-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}\\
\underset{x\to 0}{\to} \;&-6;
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{\tan x}-e^{\arcsin x}} = 6, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin x}-e^{\tan x}}{x^3} = -\frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\arcsin x}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/06/22 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{2}\sin(ax)}, \qquad a = 2, 3, 4, 5.$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per ogni numero reale, cioè il suo dominio è

$$(-\infty, +\infty).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione non è pari né dispari e, perché dipende solo dal seno di ax, è periodica di periodo $\frac{2\pi}{a}$.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché f è un esponenziale, allora

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in (-\infty, +\infty);$$

inoltre, $f(0) = 1$ e f non si annulla mai, dunque

$$\begin{aligned} f(x) &\qquad \text{interseca l'asse verticale in } (0,1), \\ f(x) &\qquad \text{non interseca l'asse orizzontale.} \end{aligned}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} f(x),$$

dunque non ci sono asintoti.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = a\sqrt{2}\cos(ax)e^{\sqrt{2}\sin(ax)}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/06/22 - foglio 3/5*

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x)$ si ottiene (restringendosi a $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)$):

$$\begin{array}{ccl} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{2a}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{a}\right), \\ f(x) & \text{ha un massimo} & \text{in } x = -\frac{\pi}{2a}, \\ f(x) & \text{ha un minimo} & \text{in } x = \frac{\pi}{2a}; \end{array}$$

massimi e minimi sono assoluti perché $f(x)$ non assume mai valori maggiori o minori.

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

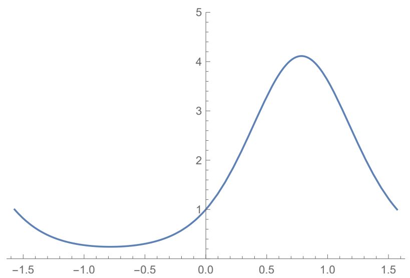
$$f''(x) = a^2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cos^2(ax) - \sin(ax)\right) e^{\sqrt{2}\sin(ax)},$$

studiando il segno di $f''(x)$ si ottiene (restringendosi a $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)$):

$$\begin{array}{ccl} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{4a}\right) \cup \left(\frac{3}{4a}\pi, \frac{\pi}{a}\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(\frac{\pi}{4a}, \frac{3}{4a}\pi\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = \frac{\pi}{4a}, \frac{3}{4a}\pi. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/06/22 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^a x \ln(a+x)\mathrm{d}x, \qquad a = 5, 4, 3, 2.$$

Soluzione: Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^a x \ln(a+x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(a+x)\right]_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{2(a+x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{a^2}{2}\ln(2a) - \int_0^a \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2}\frac{1}{a+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{a^2}{2}\ln(2a) - \left[\frac{x^2}{4} - \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{2}\ln(a+x)\right]_0^a \\
&= \frac{a^2}{2}\ln(2a) - \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(2a) - \frac{a^2}{2}\ln a\right) \\
&= \frac{a^2}{4}(1 + 2\ln a).
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/06/22 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!+a}{(k+1)!+b}, \qquad a,b=\pm 1;$

Soluzione: Poiché $n^2 \dfrac{(n-1)!+a}{(n+1)!+b} = n^2 \dfrac{\frac{1}{n(n+1)} + \frac{a}{(n+1)!}}{1+\frac{b}{(n+1)!}} = \dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{a}{(n-1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{1+\frac{b}{(n+1)!}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, dal confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ otteniamo che la serie

CONVERGE.

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k-1)!+a}{(k+1)!+b}, \qquad a,b=\pm 1;$

Soluzione: Dal punto precedente la serie converge assolutamente, dunque

CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$(1+i)z^5 = 1-i.$$

Soluzione: Poiché $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{2} = -i = 1e^{i\frac{3}{2}\pi}$, le soluzioni sono

$$z = e^{i\left(\frac{3}{10}\pi + \frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad k=0,\dots,4;$$

allo stesso modo,

$$(1-i)z^5 = 1+i = i(1-i) = (1-i)e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z = e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad k=0,\dots,4;$$

$$(1+i)z^5 = -1+i = i(1+i) = (-1+i)e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z = e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad k=0,\dots,4;$$

$$(1-i)z^5 = -1-i = -i(1-i) = (-1-i)e^{i\frac{3}{2}\pi} \iff z = e^{i\left(\frac{3}{10}\pi+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad k=0,\dots,4.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.