Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 09/09/22 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+n^2\right)-2\ln n\right)a_n,\qquad a_n=\sin n,\cos n,\sin\left(n^2\right),\cos\left(n^2\right).$$

Soluzione: Poiché a_n è limitata e

$$\ln\left(1+n^2\right)-2\ln n=\ln\left(1+n^2\right)-\ln\left(n^2\right)=\ln\frac{1+n^2}{n^2}=\ln\left(\frac{1}{n^2}+1\right)\underset{n\to+\infty}{\rightarrow}0,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+n^2\right)-2\ln n\right)a_n=0.$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{1-\cos x}.$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right),\\ \sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right),\\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right), \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{1-\cos x} &= \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-\left(1+x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}\\ &= \frac{x^2+o\left(x^2\right)}{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}\\ &= \frac{1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}\\ &\underset{x\to 0}{\rightarrow} 2; \end{aligned}$$

allo stesso modo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{1-\cos x}=-2;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-\sqrt{1+2x}}=\frac{1}{2};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{e^x-\sqrt{1+2x}}=-\frac{1}{2}.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 09/09/22 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - (a+1)x + a}{|x|}, \qquad a = 2, 3, 4, 5$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: Il denominatore è diverso da zero se $x \neq 0$, dunque il dominio è

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione non è pari né dispari né simmetrica.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Studiando il segno di $f(x)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x) &\quad > 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (a, +\infty), \\ f(x) &\quad < 0 \quad \text{per } x \in (1, a); \end{aligned}$$

inoltre, f non è definita in 0 e f si annulla in $1, a$, dunque

$$\begin{aligned} f(x) &\qquad \text{non interseca l'asse verticale,} \\ f(x) &\qquad \text{interseca l'asse orizzontale in } (1,0), (a,0). \end{aligned}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

dunque $x = 0$ è un asintoto verticale e inoltre, poiché $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\to} 1$ e $f(x) \mp x \underset{x \to \pm\infty}{\to} \pm(a+1)$, $y = \pm(x - a - 1)$ è un asintoto obliquo.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a}{x^2} & \text{per } x > 0 \\ -1 + \dfrac{a}{x^2} & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 09/09/22 - foglio 3/5*

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x)$ si ottiene:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in \left(-\sqrt{a}, 0\right) \cup \left(\sqrt{a}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in \left(-\infty, -\sqrt{a}\right) \cup \left(0, \sqrt{a}\right), \\ f(x) & \text{ha un minimo} & \text{in } x = \pm\sqrt{a}; \end{array}$$

poiché $f\left(\pm\sqrt{a}\right) = 2\sqrt{a} \mp (1+a)$, allora $\sqrt{a}$ è un minimo assoluto.

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

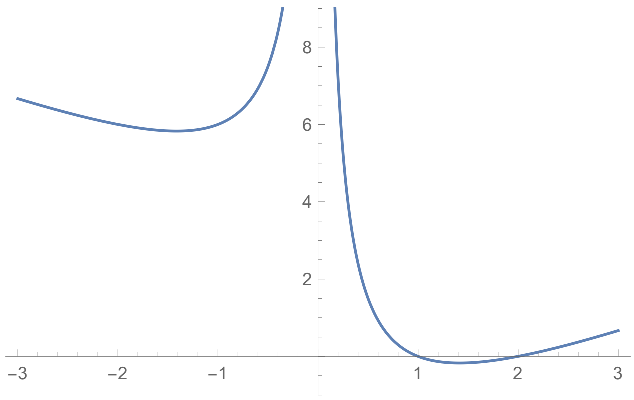
$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2a}{x^3} & \text{per } x > 0 \\ -\dfrac{2a}{x^3} & \text{per } x < 0 \end{cases},$$

è sempre positiva, allora

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \\ f(x) & \text{non ha flessi} & . \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



---

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 09/09/22 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(2x)\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con il cambio di variabile $y = \cos(2x)$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(2x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\left(1-\cos^2(2x)\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-y^2\right)^2 \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left[y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{15};
\end{aligned}$$

allo stesso modo,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5(2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^0 \left(1-y^2\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{4}{15};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5(3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1-y^2\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{8}{45};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^5(3x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int_1^0 \left(1-y^2\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{8}{45}.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 09/09/22 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{e^{ak}k!}, \qquad a = 5, 4, 3, 2;$

Soluzione: Poiché $\dfrac{\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{a(n+1)}(n+1)!}}{\frac{n^n}{e^{an}n!}} = \dfrac{(n+1)^{n+1}e^{an}n!}{n^n e^{a(n+1)}(n+1)!} = \dfrac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e^a(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{e^{a-1}} < 1$, dal criterio del rapporto deduciamo che la serie

CONVERGE.

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{e^{ak}k!}, \qquad a = 5, 4, 3, 2;$

Soluzione: Dal punto precedente la serie converge assolutamente, dunque

CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$(z-i)^7 = i(1+i).$$

Soluzione: Poiché $i(1+i) = -1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$, le soluzioni sono:

$$z = i + \sqrt[14]{2}e^{i\left(\frac{3}{28}\pi + \frac{2k\pi}{7}\right)}, \qquad k = 0, \dots, 6;$$

allo stesso modo,

$$(z-i)^7 = i(1-i) = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z = i + \sqrt[14]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)}, \qquad k = 0, \dots, 6;$$

$$(z-i)^7 = i(-1+i) = -1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi} \iff z = i + \sqrt[14]{2}e^{i\left(\frac{5}{28}\pi + \frac{2k\pi}{7}\right)}, \qquad k = 0, \dots, 6;$$

$$(z-i)^7 = i(-1-i) = 1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi} \iff z = i + \sqrt[14]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7}\right)}, \qquad k = 0, \dots, 6.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.