Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 08/07/22 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}.$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{n^2\sin\frac{1}{n}}{n+1}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}n\sin\frac{1}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}=e;$$

allo stesso modo,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\arcsin\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\arctan\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=e.$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)\tan x-x^2}{(\arcsin x)\arctan x-x^2}.$$

Soluzione: Dagli sviluppo di Taylor

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right),\quad \tan x=x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),\quad \arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right),\quad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{(\sin x)\tan x-x^2}{(\arcsin x)\arctan x-x^2} &= \frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-x^2}{\left(x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-x^2}\\ &= \frac{x^2+\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)-x^2}{x^2-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)-x^2}\\ &= \frac{\frac{1}{6}+o(1)}{-\frac{1}{6}+o(1)}\\ &\underset{x\to 0}{\to} -1;\end{aligned}$$

allo stesso modo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(\sin x)\tan x}{(\arcsin x)\arctan x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(\arcsin x)\arctan x}{(\sin x)\tan x-x^2}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x)\arctan x-x^2}{(\sin x)\tan x-x^2}=-1.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 08/07/22 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = a \arctan\left(x^3\right) + \frac{\pi}{4}a, \qquad a = 4, 2, \frac{4}{\pi}, 1.$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per ogni numero reale, cioè il suo dominio è

$$(-\infty, +\infty).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione non è pari né dispari né simmetrica.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché l'arcotangente è crescente, studiando il segno di f si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in (-1, +\infty), \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, -1); \end{aligned}$$

inoltre, $f(0) = \frac{\pi}{4}a$ e f si annulla in -1, dunque

$$\begin{aligned} &f(x) \qquad \text{interseca l'asse verticale in } \left(0, \frac{\pi}{4}a\right), \\ &f(x) \qquad \text{interseca l'asse orizzontale in } (-1, 0). \end{aligned}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}a, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2}\pi a,$$

dunque $y = -\frac{\pi}{2}a, \frac{3}{2}\pi a$ è un asintoto orizzontale.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = \frac{12ax^2}{x^6 + 1}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 08/07/22 - foglio 3/5*

Soluzione: Poiché $f'(x) \geq 0$ per ogni x, allora

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in (-\infty, +\infty), \\ f(x) & \text{non ha massimi né minimi} & . \end{array}$$

il massimo non è assoluto perché f può tendere a $+\infty$.

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

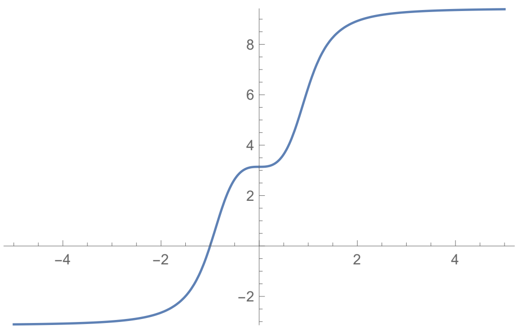
$$f''(x) = \frac{24ax\left(1-2x^6\right)}{\left(x^6+1\right)^2},$$

studiando il segno di $f''(x)$ si ottiene:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt[6]{2}}. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 08/07/22 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\ln(a-1)} \frac{1}{a-e^x}\mathrm{d}x, \qquad a = 3, 4, 5, 6.$$

Soluzione: Con i cambi di variabile $y = e^x$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(a-1)} \frac{1}{a-e^x}\mathrm{d}x &= \int_1^{a-1} \frac{1}{y(a-y)}\mathrm{d}y \\ &= \int_1^{a-1} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-a}\right)\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{1}{a}(\ln|y| - \ln|a-y|)\right]_1^{a-1} \\ &= \frac{2}{a}\ln(a-1). \end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 08/07/22 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k^2+a}-k\right), \qquad a=4,3,2,1;$

Soluzione: Poiché $n\left(\sqrt{n^2+a}-n\right)=n\dfrac{n^2+a-n^2}{\sqrt{n^2+a}+n}=\dfrac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n^2}}+1}\underset{n\to+\infty}{\to}\dfrac{a}{2}$, dal confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ otteniamo che la serie

NON CONVERGE.

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{k^2+a}-k\right), \qquad a=4,3,2,1;$

Soluzione: Poiché $\sqrt{n^2+a}-n=\dfrac{a}{\sqrt{n^2+a}+n}$ è positiva, infinitesima e decrescente, deduciamo che la serie

CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^6=-(iz)^2.$$

Soluzione: Scrivendo $-(iz)^2=z^2$, le soluzioni saranno date da $z=0$ e dalle soluzioni di $z^4=1=1e^{i\cdot 0}$, cioè

$$z=0, z=e^{i\frac{k\pi}{2}}, \qquad k=0,\dots,3;$$

allo stesso modo,

$$z^6=(-iz)^2=-z^2=z^2e^{i\pi} \iff z=0, z=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \qquad k=0,\dots,3;$$

$$z^6=-(iz)^3=iz^3=z^3e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z=0, z=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k=0,\dots,2;$$

$$z^6=(-iz)^3=iz^3=z^3e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z=0, z=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k=0,\dots,2.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di tre ore.