Analisi non lineare

Prof. Agrachev - Anno Accademico 2011 – 2012

Lezione 1 – 14/10/2011

Teorema 1.
Siano $n \geq m$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ *ha rango massimo.*
Allora esiste un intorno aperto O *di* x_0 *e un diffeomorfismo* $\psi : O \to O$ *tale che* $f \circ \psi$ *è affine.*

Dimostrazione.
A meno di riordinare le coordinate, si può supporre $x = (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ con $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0)$ invertibile; dunque, ponendo $F(u, v, y) = f(u, v) - y : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ si ha

$$F(u_0, v_0, f(x_0)) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0, f(x_0)) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) \text{ è invertibile}$$

dunque per il teorema della funzione implicita esistono $r > 0$ e $\varphi : B_r(v_0) \times B_r(f(x_0)) \to B_r(u_0)$ tale che

$$f(\varphi(v, y), v) - y = F(\varphi(v, y), v, y) \equiv 0 \tag{1}$$

ponendo dunque $\psi(u, v) = (\varphi(v, u - u_0 + y_0), v)$ si ha

$$f(\psi(u, v)) = f(\varphi(v, u - u_0 + y_0), v) = u - u_0 + y_0$$

che è lineare; inoltre, dalla (1) si ricava che

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(v, y), v)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(v, y) = \mathbb{I}_m$$

e dunque $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ è invertibile e pertanto, essendo

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(v, u - u_0 + y_0) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(v, u - u_0 + y_0) \\ 0 & \mathbb{I}_{n-m} \end{pmatrix}$$

ψ è un diffeomorfismo. $\square$

Teorema 2 (Rango costante)**.**
Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *tale che* $f(0) = 0$.
Il rango di $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *è localmente costante in* 0 *se e solo se esistono due intorni* $O \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ *di* 0 *e due diffeomorfismi* $\psi : O \to O$, $\varphi : U \to U$ *tali che* $\varphi \circ f \circ \psi$ *è lineare.*

Dimostrazione.
Se esistono φ, ψ con queste proprietà allora il rango di $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ è localmente costante perché lo è quello $\dfrac{\partial(\varphi \circ f \circ \psi)}{\partial y}$, perché quest'ultima mappa lineare, e dunque essendo φ, ψ diffeomorfismi,

$$\mathrm{r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right) = \mathrm{r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(f(x))\frac{\partial f}{\partial x}(x)\frac{\partial \psi}{\partial y}\left(\psi^{-1}(x)\right)\right) = \mathrm{r}\left(\frac{\partial(\varphi \circ f \circ \psi)}{\partial y}\left(\psi^{-1}(x)\right)\right)$$

è localmente costante.
Viceversa, se $\mathrm{r}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = k$, si può supporre a meno di rotazioni che $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 \times \mathbb{R}^k$ e scrivere $x = (u, v) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, $f(u, v) = (g(u, v), h(u, v)) \in \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$ con $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ di rango k; dunque, per il teorema 1, esiste un intorno O di 0 e un diffeomorfismo $\psi : O \to O$ tale che $(h \circ \psi)(u, v) = v$; ponendo inoltre $\varphi(w, v) = (w - (g \circ \psi)(0, v), v)$, quest'ultimo è un diffeomorfismo locale in 0 perché

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(w, v)}(w, v) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{m-k} & \frac{\partial(g \circ \psi)}{\partial v}(0, v) \\ 0 & \mathbb{I}_k \end{pmatrix}$$

Infine, poiché la matrice

$$\frac{\partial(\varphi \circ f \circ \psi)}{\partial x}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ \psi)}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial(g \circ \psi)}{\partial u}(0, v) & \frac{\partial(g \circ \psi)}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial(g \circ \psi)}{\partial v}(0, v) \\ 0 & \mathbb{I}_k \end{pmatrix}$$

deve avere rango k, dev'essere $\dfrac{\partial(g \circ \psi(u, v) - g \circ \psi(0, v))}{\partial u} \equiv 0$ e dunque $g \circ \psi(u, v) = g \circ \psi(0, v)$, pertanto $\varphi \circ f \circ \psi(u, v) = ((g \circ \psi)(u, v) - (g \circ \psi)(0, v), v) = (0, v)$ che è lineare. □

Definizione 1.
Sia $M \subset \mathbb{R}^n$.
M si dice **sottovarietà** di dimensione k se per ogni $x \in M$ vale una delle tre equivalenti proprietà:

1. Esiste $O \subset \mathbb{R}^n$ intorno aperto di x e $F \in C^1\left(O, \mathbb{R}^{n-k}\right)$ con $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x)$ suriettiva e $M \cap O = F^{-1}(\{0\})$
2. Esistono aperti $V \ni 0$ di $\mathbb{R}^k$ e $O \ni 0$ di $\mathbb{R}^n$ un omeomorfismo $f \in C^1(V, O \cap M)$ con $f(0) = x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0)$ iniettiva

3. Esiste $O \subset \mathbb{R}^n$ intorno aperto di x e $\psi \in C^1(O, O)$ con $\psi(O \cap M) = (\mathbb{R}^k \times 0) \cap O$

Lo **spazio tangente** a M nel punto $\mathbf{x}$ è, nei tre casi, rispettivamente:

1. $T_xM = \ker\left(\dfrac{\partial F}{\partial v}(x)\right)$ 2. $T_xM = \operatorname{Im}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}(0)\right)$ 3. $T_xM = \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial v}\right)^{-1}(\mathbb{R}^n)$

Definizione 2.
Sia M uno spazio topologico di Hausdorff.
M si dice **varietà differenziabile con bordo** di dimensione k se esistono due famiglie $\{(O_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A},\ \{(O_\beta, \varphi_\beta)_{\beta \in B}$ tali che $O_\alpha, O_\beta \subset M$ sono aperti che ricoprono M e $\varphi_\alpha : O_\alpha \to \mathbb{R}^k,\ \varphi_\beta : O_\beta \to \mathbb{R}^k \cap \{x \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}$ sono tali che $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sono diffeomorfismi per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.
Se $x \in \varphi_\beta^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^k : x_1 = 0\})$ per qualche β, x è detto **punto di bordo**; l'insieme dei punti di bordo è detto **bordo** di M e si indica con ∂M.

Osservazione 1.
Se M è una varietà differenziabile con bordo di dimensione k, ∂M è una varietà differenziabile di dimensione $k - 1$.

Definizione 3.
Siano M, N due varietà e $F \in C^1(M, N)$.
Il **differenziale** di F in x è l'applicazione lineare $D_xF : T_xM \to T_{f(x)}N$ definita come

$$D_xF\left(\frac{d\gamma}{dt}(0)\right) = \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\bigg|_{t=0}$$

per ogni curva $\gamma : \mathbb{R} \to N$ con $\gamma(0) = x$.

Definizione 4.
Siano M, N due varietà, $x \in M$ e $F \in C^1(M, N)$.
Se $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x)$ è suriettiva, x si dice **punto regolare** per F; altrimenti, x si dice **punto critico** per F.
Se esiste un punto critico $x \in F^{-1}(\{y\})$, $y \in N$ si dice **valore critico** per F; altrimenti, y si dice **valore regolare** per F.

Osservazione 2.
Se y è un valore regolare per $F : M \to N$, allora $F^{-1}(\{y\})$ è una varietà di dimensione $\dim(N) - \dim(M)$.

Definizione 5.
Sia $W \subset N$ una sottovarietà e $f \in C^1(M, N)$.
Se $\operatorname{Im}(D_xf) + T_{f(x)}W = T_{f(x)}N$ per ogni $x \in M$ tale che $f(x) \in W$, f è **trasversale** a W e si indica $f \pitchfork W$.

Lemma 3.
Sia $W \subset N$ una sottovarietà e $f \in C^1(M, N)$ trasversale a W.
Allora $f^{-1}(W)$ è una sottovarietà di M tale che $\dim(N) - \dim(W) = \dim(M) - \dim\left(f^{-1}(W)\right)$.

Dimostrazione.
Posti $n = \dim(M)$, $k = \dim(N)$ e $l = \dim(W)$, per ogni $x \in f^{-1}(W)$ esiste un intorno U di $f(x)$ e $\varphi \in C^1\left(U, \mathbb{R}^{n-k}\right)$ tale che $U \cap W = \varphi^{-1}(\{0\})$ e, per la continuità di f, $f^{-1}(U)$ è un intorno di x tale che $(\varphi \circ f)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\varphi^{-1}(\{0\})\right) = f^{-1}(U \cap W) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}($
e inoltre x è regolare per $\varphi \circ f$ perché, essendo φ nulla su W, $D_{f(x)}\varphi(T_{f(x)}W) = 0$ e dunque

$$\mathrm{Im}(D_x(\varphi \circ f)) = D_{f(x)}\varphi(\mathrm{Im}(D_x f)) = D_{f(x)}\varphi(\mathrm{Im}(D_x f) + T_{f(x)}W) =$$

$$= D_{f(x)}\varphi(T_{f(x)}N) = \mathbb{R}^{k-l}$$

dunque $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(W) = (\varphi \circ f)^{-1}(\{0\})$ è una varietà di dimensione $n - k + l$, e quindi lo è anche $f^{-1}(W)$. $\square$

Lezione 2 – 15/10/2011

Definizione 6.
Siano M, N, W varietà e $f \in C^1(M, N)$, $g \in C^1(W, N)$.
f e g si dicono **trasversali** se per ogni $x \in M, y \in W$ con $f(x) = g(y)$ si ha $\mathrm{Im}(D_x f) + \mathrm{Im}(D_y g) = T_{f(x)}N$, e si indica $f \pitchfork g$.

Osservazione 3.
Due mappe $f \in C^1(M, N)$ e $g \in C^1(W, N)$ sono trasversali se e solo se la mappa $(f, g) : (x, y) \to (f(x), g(y))$ è trasversale alla diagonale $\Delta_N = \{(z, z) : z \in N\}$.

Definizione 7.
Sia $S \subset \mathbb{R}^k$.
S si dice **di misura 0** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia numerabile di palle $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tali che $S \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ e $\sum_{i \in \mathbb{B}} \mathrm{Vol}(B_i) \leq \varepsilon$.

Osservazione 4.
Gli insiemi di misura 0 hanno le seguenti proprietà:

1. Se $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di insiemi di misura 0, allora anche $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ ha misura 0.
2. Se S ha misura 0 e $\varphi \in \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n\right)$ è Lipschitz, allora anche $\varphi(S)$ ha misura 0.

Teorema 4 (Morse-Sard)**.**
Sia $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right)$.
Allora l'insieme dei suoi valori critici ha misura nulla in $\mathbb{R}^k$

Dimostrazione.
Procediamo per doppia induzione su n e k.
Se $k = 1$ e $n = 0$, $\mathrm{Im}(f)$ è un punto e dunque ha misura nulla in $\mathbb{R}$; supponiamo

dunque che il teorema sia vero per $k = 1$ e $n - 1$ e mostriamo che vale anche per $k = 1$ e n: indicando con C_f l'insieme dei punti critici di f e

$$X_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_j}(x) = 0, \forall j = (j_1, \ldots, j_n) \text{ con } |j| \leq n \right\}$$

basta dimostrare che $f(X_n)$ e $f(C_f \backslash X_n)$ hanno entrambi misura 0: definendo, per ogni $j = (j_1, \ldots, j_n)$,

$$V_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_j}(x) = 0, D_x \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_j} \neq 0 \right\}$$

si ha $C_f \backslash X_n \subset \bigcup_{|j| \leq n-1} V_j$, con $V_j = \left(\frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_j}(x) \right)^{-1} (\{0\})$ varietà di dimensione $n - 1$, ma essendo $C_f \cap V_j \subset C_{f|_{V_j}}$, allora

$$|f(C_f \backslash X_n)| \leq \sum_{|j| \leq n} |f(C_f \cap V_j)| \leq \sum_{|j| \leq n} \left| f\left(C_{f|_{V_j}} \right) \right| = 0$$

ove l'ultimo passaggio segue dall'ipotesi induttiva; quanto a X_n, è sufficiente provare che $|f(X_n \cap I)| = 0$ per ogni cubo $I \subset \mathbb{R}^n$ di lato 1: su $X_n \cap I$ si avrà $\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|^{n+1}$, quindi dividendo I in $\frac{1}{\varepsilon^n}$ cubetti Q_i di lato ε, che dunque saranno tali che $\operatorname{diam}(f(Q_i)) \leq C\varepsilon^{n+1}$; prendendo quindi una palla $B_i \supset f(Q_i)$ avente tale diametro, si ha

$$f(X_n) = \bigcup_i f(Q_i) \subset \bigcup_i B_i \quad \text{con} \quad \sum_i \operatorname{Vol}(B_i) \leq \sum_i C\varepsilon^{n+1} \leq C\varepsilon$$

e pertanto la base induttiva è provata.
Mostriamo ora che se il teorema è vero per $n - 1$ e $k - 1$ allora è vero anchs per n e k: scrivendo $f = \left(\hat{f}, f_k \right)$, se $y = (\hat{y}, y_k) \in \mathbb{R}^k$ è critico per f, allora y_k è regolare per f_k oppure $\hat{y}$ è critico per $\hat{f}|_{f_k^{-1}(\{y_k\})}$; tuttavia, per ipotesi induttiva, i valori critici di $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hanno misura nulla e, essendo $f_k^{-1}(y_k)$ una $n-1$-varietà, anche quelli di $\hat{f}|_{f_k^{-1}(y_k)} : f_k^{-1}(y_k) \to \mathbb{R}^{k-1}$, quindi per il teorema di Fubini anche i valori critici di f generati da ciascuna delle due famiglie ha misura nulla, e dunque $|f(C_f)| = 0$. □

Osservazione 5.
Nel caso $k \geq n$, tutti i punti di una mappa $f \in C^1 \left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \right)$ sono critici, dunque l'insieme dei valori critici coincide con $\operatorname{Im}(f)$; dunque, il teorema di Morse-Sard 4 dice che in questo caso $\operatorname{Im}(f)$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^n$, cosa che in genere non è vera se si suppone f solo continua, come ad esempio nel caso della curva di Peano.

Corollario 5.
Ogni varietà liscia M si può scrivere come $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ con $B_i \subset B_{i+1}$ sottovarietà di M compatte con bordo.

Dimostrazione.
Fissata M, costruisco $\alpha : M \to \mathbb{R}$ tale che $\alpha^{-1}([0,t])$ è compatto per ogni t; per il teorema di Morse-Sard 4, esiste una successione $t_i \underset{i \to +\infty}{\nearrow} +\infty$ di valori regolari, dunque è sufficiente porre $B_i := \alpha^{-1}([0,t_i])$ per avere una successione crescente di varietà compatte con bordo che ricoprono M. □

Lezione 3 – 20/10/2011

Definizione 8.
Sia $F \in C^1(M,N)$.
Se $D_x F : T_x M \to T_{F(x)} N$ è suriettiva per ogni $x \in M$, F è detta **summersione**.
Se $D_x F : T_x M \to T_{F(x)} N$ è iniettiva per ogni $x \in M$, F è detta **immersione**.
Se F è un'immersione e un omeomorfismo sull'immagine, F è detta **embedding**.

Proposizione 6.
Sia $F \in C^1(U \times M, N)$ una summersione e $(u,x) \in F^{-1}(W)$ regolare per $p|_{F^{-1}(W)}$, ove $p : (u,x) \to u$.
Allora $f_u := F(u,\cdot) : M \to N$ è trasversale a W in x.

Dimostrazione.
Essendo F una summersione, $F \pitchfork W$ e dunque $F^{-1}(W)$ è una varietà e

$$T_{(u,x)} F^{-1}(W) = \{(v,\xi) \in T_x U \times T_x M : D_{(u,x)} F(v,\xi) \in W\} =$$
$$= \left\{(v,\xi) \in T_x U \times T_x M : \frac{\partial F}{\partial u}(u,x)v + \frac{\partial F}{\partial x}(u,x)\xi \in W\right\}$$

Inoltre, per la suriettività di $\mathrm{Im}(D_{(u,x)}F)$, per ogni $\eta \in T_{F(u,x)}N$ esistono $v_\eta \in T_x U, \xi_\eta \in T_x M$ tali che $\frac{\partial F}{\partial u}(u,x)v_\eta + \frac{\partial F}{\partial x}(u,x)\xi_\eta = \eta$; per ipotesi, $D_{(x,u)}|_{F^{-1}(W)} : (v,\xi) \to \xi$ è suriettiva, dunque per ogni $v_\eta \in T_x U$ esiste $\widetilde{\xi}_\eta \in T_x M$ tali che $\left(v_\eta, \widetilde{\xi}_\eta\right) \in T_{(u,x)} F^{-1}(W)$; dunque,

$$\eta = \frac{\partial F}{\partial u}(u,x)v_\eta + \frac{\partial F}{\partial x}(u,x)\xi_\eta =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial u}(u,x)v_\eta + \frac{\partial F}{\partial x}(u,x)\widetilde{\xi}_\eta + \frac{\partial F}{\partial x}(u,x)\left(\xi_\eta - \widetilde{\xi}_\eta\right) \in T_{f_u(x)}W + \mathrm{Im}(D_x f_u)$$

per l'arbitrarietà di η, si ha $T_{f_u(x)}N \subset T_{f_u(x)}W + \mathrm{Im}(D_x f_u)$ e dunque $f_u \pitchfork W$ in x. □

Proposizione 7.
Siano U, M, N varietà, $F \in C^1(U \times M, N)$ una summersione e $W \subset N$ una sottovarietà.
Allora, $f_u \pitchfork W$ per q.o. $u \in U$.

Dimostrazione.
Dal teorema di Morse-Sard 4, q.o. $u \in U$ è regolare per $p|_{F^{-1}(W)}$, e dunque applicando la proposizione 6 per questi valori si ottiene la tesi. $\square$

Corollario 8.
Sia $f \in C^1\left(M, \mathbb{R}^k\right)$ e $W \subset \mathbb{R}^k$ sottovarietà.
Allora, per q.o. $y \in \mathbb{R}^k$, la mappa $f_y : x \to f(x) + y$ è trasversale a W.

Definizione 9.
Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una n-varietà.
Il fibrato vettoriale $M \times \mathbb{R}^k$ è detto **fibrato vettoriale banale**.
Il fibrato vettoriale $TM := \{(x, v) : x \in M, v \in T_xM\}$ è detto **fibrato tangente**.
Il fibrato vettoriale $SM := \{(x, v) \in TM : \|v\| = 1\}$ è detto **fibrato sferico**.
Il fibrato vettoriale $TM^{\perp} := \left\{(x, v) : x \in M, v \in T_xM^{\perp}\right\}$ è detto **fibrato normale**.

Osservazione 6.
Il fibrato vettoriale banale ha dimensione $n + k$, il fibrato tangente ha dimensione $2n$, il fibrato sferico ha dimensione $2n - 1$ e il fibrato normale ha dimensione $2n - k$; inoltre, ogni fibrato vettoriale è un sottofibrato di quello banale, e in particolare $M \times \mathbb{R}^n = TM \oplus TM^{\perp}$

Teorema 9 (Whitney)**.**
Sia M una n-varietà.
Allora esistono un'immersione $\varphi : M \to \mathbb{R}^{2n}$ e un embedding $\psi : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, in virtù del corollario 5, si può supporre M compatta oppure $M = \overline{M} \backslash \partial \overline{M}$ con $\overline{M}$ compatta con bordo; dunque si può supporre di avere un numero finito di carte locali $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,\dots,m}$ e prendere $V_i \Subset U_i$ con $M = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$; per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ prendiamo $a_i \in C^1(M, \mathbb{R})$ con $\mathrm{supp}(a_i) \subset U_i$ e $a_i \equiv 1$ su V_i e consideriamo $\varphi : x \to (a_1(x)\varphi_1(x), \dots, a_m(x)\varphi_m(x))$; è un embedding di M in $\mathbb{R}^{mn}$, dunque d'ora in poi si può supporre senza perdita di generalità che $M \subset \mathbb{R}^{mn}$.
A questo punto, per dimostrare l'esistenza dell'immersione φ è sufficiente che per almeno un valore di $l \in \mathbb{S}^{k-1}$ la proiezione $\pi_l : \mathbb{R}^k \to l^{\perp}$ ristretta a M sia un'immersione per ogni $k > 2n$, perché iterando il procedimento si otterrà un'immersione in $\mathbb{R}^{2n}$; per mostrare questo fatto, notiamo che $D_x\pi_l$ è iniettiva se e solo se $l \notin T_xM \subset \mathbb{R}^n$; definendo $p : SM \to \mathbb{S}^{k-1}$ come $p(x, v) = v$, la sua immagine ha misura nulla per il teorema di Morse-Sard 4, e dunque per ogni $x \in M$ fissato l'insieme degli $l \in T_xM \cap \mathbb{S}^{k-1}$, cioè l'insieme dei valori per cui π_l non è un'immersione, ha misura nulla, e dunque in particolare non è vuoto.
Per mostrare l'esistenza dell'embedding ψ è sufficiente far vedere che, per $k > 2n + 1$, $\pi_l|_M$ sia un embedding per q.o. $l \in \mathbb{S}^{k-1}$, e per la compattezza di M vasterà mostrare l'iniettività di $\pi_l|M$; posta $\Sigma = M \times M \backslash \Delta_M$, considero $\widetilde{\varphi} : \Sigma \to \mathbb{S}^{k-1}$

definita da $\widetilde{\varphi}(x,y) = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$: essendo una mappa liscia tra una varietà di dimensione $2n$ e una di dimensione $k-1 > 2n$, per il teorema di Morse-Sard 4 la sua immagine avrà misura nulla in $\mathbb{R}^k$; tuttavia, essendo π_l è iniettiva sul complementare dell'immagine di $\widetilde{\varphi}$, che ha misura nulla, lo è per q.o. l, e quindi si ha la tesi. $\square$

Osservazione 7.
Data una n-varietà $M \subset \mathbb{R}^k$, la mappa $F : TM^{\perp} \to \mathbb{R}^k$ definita da $F(x,\xi) = x + \xi$ ha rango massimo, come si può vedere facilmente calcolando le derivate, dunque è un diffeomorfismo su un intorno O_M di M.

Definizione 10.
Sia $M \subset \mathbb{R}^k$ una n-varietà.
L'intorno O_M definito in precedenza è detto **intorno tubolare** e l'inversa locale di F si denota con $\pi_M : F^{-1} : O_M \to M$

Proposizione 10.
Siano M, N varietà, $f \in C^1(M,N)$ e $W \subset N$ una sottovarietà.
Allora esiste $\widetilde{f} : M \to N$ arbitrariamente vicina a f (nella topologia C^1) tale che $f \pitchfork W$.

Dimostrazione.
Per il teorema di Whitney 9 si può supporre $M, N \subset \mathbb{R}^k$; la mappa $F(x,y) : x \to \pi_M(f(x)+y)$, definita su un intorno $O_M \subset \mathbb{R}^k$ di M, è una summersione e dunque, per la proposizione 7, $f_y = F(\cdot, y)$ è trasversale a W per q.o. $y \in \mathbb{R}^k$, in particolare lo è per y arbitrariamente vicini a 0, valori per cui f_y è arbitrariamente vicina a f. $\square$

Proposizione 11.
Siano M, N varietà e $f \in C(M,N)$.
Allora esiste $\widetilde{f} \in C^1(M,N)$ arbitrariamente vicina a f (nella topologia C^0).

Dimostrazione.
Supponiamo $M, N \subset \mathbb{R}^k$ e consideriamo $f \circ \pi_M : O_M \to \mathbb{R}^k$; essendo continua, esiste un polinomio g arbitrariamente vicino nella topologia C^0; dunque, prendendo un intorno tubolare $O_N \supset N$, la mappa $\widetilde{f} = \pi_N \circ g|_M$ ha le proprietà richieste. $\square$

Lezione 4 – 21/10/2011

Lemma 12.
Sia M varietà con bordo, $f \in C^1(M,N)$ e $W \subset N$ sottovarietà tale che $f|_{\partial M} \pitchfork W$.
Allora esiste $\widetilde{f} \in C^1(M,N)$ arbitrariamente vicina a f (nella topologia C^1) tale che $\widetilde{f}|_{\partial M} = f|_{\partial M}$ e $\widetilde{f} \pitchfork W$.

Dimostrazione.
Supponiamo $M, N \subset \mathbb{R}^k$ e prendiamo $a \in C^1(M, \mathbb{R})$ tale che $a|_{\partial M} \equiv 0$ e $a \equiv 1$ fuori da un intorno di ∂M; allora, la mappa $f_y : x \to \pi_N(f(x) + a(x)y)$, definita su un intorno O_N di N, assume gli stessi valori di f su ∂M, è trasversale a W per q.o. y, in particolare per y arbitrariamente vicina a 0, e dunque per questi valori si ottiene la $\widetilde{f}$ desiderata. $\square$

Definizione 11.
Siano $f_0, f_1 \in C(M, N)$.
Una **omotopia** tra f_0 e f_1 è una mappa $F : M \times [0, 1] \to N$ tale che $F(\cdot, i) = f$ per $i = 0, 1$.

Proposizione 13.
Siano M, N varietà e $f \in C(M, N)$.
Allora, un intorno $\mathcal{U}$ di f (nella topologia C^0) tale che per ogni $g_0, g_1 \in \mathcal{U}$ esiste un'omotopia tra g_0 e g_1.

Dimostrazione.
Supponiamo $N \subset \mathbb{R}^k$; se g_0, g_1 sono vicine a f nella topologia C^0, allora $tg_1(x) + (1 - t)g_0(x) \in O_N$ per un opportuno intorno O_N di N, dunque se O_N è un intorno tubolare basta prendere $F(x, t) = \pi_N(tg_1(x) + (1 - t)g_0(x))$. $\square$

Definizione 12.
Sia $E = \bigcup_{x \in M} E_x$ un fibrato vettoriale e $\pi : E_x \to x$ la sua proiezione.
Una **sezione** di E è una mappa $s \in C^1(M, E)$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{Id}$.
Un **campo vettoriale** X su M è una sezione di TM e si denota $X \in \mathrm{Vec}(M)$;
per ogni diffeomorfismo $\varphi : M \to N$, si pone $\varphi_*(X) : y \to d_{\varphi^{-1}(\{y\})}\varphi\left(X\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right)\right)$.

Proposizione 14.
Sia M una n-varietà, $X \in \mathrm{Vec}(M)$ e $x_0 \in M$ tale che $X(x_0) \neq 0$.
Allora esiste un intorno $O_{x_0} \ni x_0$ e una carta locale $\varphi : O_{x_0} \to \mathbb{R}^k$ tale che $\varphi_*(X) = (1, \ldots, 0)$.

Dimostrazione.
A meno di diffeomorfismi, si può supporre $M = \mathbb{R}^n$, $x_0 = 0$ e $X_1(0) \neq 0$; consideriamo, sull'iperpiano $(0, x_2, \ldots, x_k) = (0, y)$, la soluzione $\gamma(t, y)$ di $\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(t, y) = X(\gamma(t, y)) \\ \gamma(0, y) = y \end{cases}$;
si tratta di un diffeomorfismo locale perché

$$\frac{\partial \gamma}{\partial (t, y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} X_1(0) & X_2(0), \ldots, X_n(0) \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

Dunque, $\varphi = \gamma^{-1}$ è un diffeomorfismo con le proprietà volute perché

$$\varphi_*(X)(x) = D_{\gamma(x)}\gamma^{-1}(X(\gamma(x))) = D_{\gamma(x)}\gamma^{-1}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}(x)\right) = (1, 0, \ldots, 0)$$

$\square$

Osservazione 8.
Per ogni fibrato E su M e ogni sezione $s : M \to E$ esiste un'altra sezione $\widetilde{s}$ arbitrariamente vicina a s tale che $\widetilde{s} \pitchfork M$.
In particolare, scegliendo $E = TM$, per ogni campo vettoriale X su M ne esiste un altro $\widetilde{X}$ arbitrariamente vicino a X con $\widetilde{X} \pitchfork M$.

Proposizione 15.
Sia M una 1-varietà compatta connessa.
Allora M è diffeomorfa a $[0,1]$ oppure a $\mathbb{S}^1$.

Dimostrazione.
L'insieme degli zeri di un campo vettoriale X su M che abbia 0 come valore regolare è una 0-varietà, cioè un insieme discreto e quindi, per compattezza, discreto; dunque ogni soluzione di $\dot{q} = X(q)$ è definita globalmente da un punto di equilibrio all'altro e definisce un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e la sottovarietà ristretta all'intervallo tra questi due punti; incollando questi diffeomorfismi si ottiene un diffeomorfismo globale, che è tra M e $[0,1]$ se M ha bordo, e tra M e $\mathbb{S}^1$ se M non ne ha. $\square$

Teorema 16.
Sia $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ la palla unitaria chiusa e $\varphi \in C^1(B^n, \mathbb{S}^n)$.
Allora, non può accadere che $\varphi_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{Id}$.

Dimostrazione.
Se esistesse una φ siffatta, per il teorema di Morse-Sard 4 avrebbe un valore regolare y, e $\varphi^{-1}(\{y\})$ sarebbe una varietà compatta con bordo di dimensione 1, e dunque è unione disgiunta di copie diffeomorfe di $\mathbb{S}^1$ e $[0,1]$ e perciò ha un numero pari di punti di bordo; tuttavia, per ipotesi dev'essere $\partial\varphi^{-1}(\{y\}) = \varphi^{-1}(\{y\}) \cap \mathbb{S}^{n-1} = \{y\}$, e questo è assurdo. $\square$

Teorema 17 (Brouwer)**.**
Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^n)$.
Allora esiste $x \in \mathbb{B}^n$ tale che $\varphi(x) = x$.

Dimostrazione.
Se fosse $\varphi(x) \neq x$ per ogni $x \in \mathbb{B}^n$, si potrebbe costruire una mappa $\psi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ nel seguente modo: detta r la retta passante per x e $\varphi(x)$, $\psi(x)$ è il punto di $r \cap \mathbb{S}^{n-1}$ tale che x si trova tra $\psi(x)$ e $\varphi(x)$; ψ sarebbe una mappa di classe C^1 che coincide con l'identità su $\mathbb{S}^{n-1}$, ma non può esistere per il teorema 16. $\square$

Lezione 5 – 30/10/2011

Osservazione 9.
Il teorema di Brouwer 17 non è più valido se si sostituisce $\mathbb{R}^n$ con uno spazio di Banach di dimensione infinita; infatti, prendendo

$$\ell_2 := \left\{ \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^2 < +\infty \right\}$$

e la palla sua unitaria chiusa

$$\mathbb{B} := \left\{ x \in \ell_2 : \|x\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_i^2} \leq 1 \right\}$$

per $f(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots, \right)$ si ha $f(\mathbb{B}) = \partial\mathbb{B} =: \mathbb{S}$, dunque se fosse $f(x) = x$ per qualche $x \in \mathbb{B}$, si avrebbe $x \in \mathbb{S}$, ma l'uguaglianza delle prime componenti darebbe $x_1 = 0$, l'uguaglianza delle seconde componenti darebbe $x_2 = 0$ e così via, quindi $x = 0 \notin \mathbb{S}$.

Definizione 13.
Siano X, Y spazi di Banach e $\mathbb{B} \subset X$ la sua palla unitaria chiusa e $f \in C(\mathbb{B}, X)$. f si dice **compatta** se $\overline{f(\mathbb{B})}$ è compatto.

Esempio 1.
Prendendo $X = (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, la mappa $f : u(t) \to \int_0^1 K(t,s)\varphi(u(s))ds$ è compatta se K è continua e φ è continua e limitata; infatti, $f(\mathbb{B})$ è un insieme di funzioni equilimitate ed equicontinue, perché

$$|f(u)(t_1) - f(u)(t_2)| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^1 |K(t_1,s) - K(t_2,s)|ds \underset{t_2 \to t_1}{\to} 0$$

indipendentemente da u, e pertanto è compatto per il teorema di Ascoli-Arzelà.

Definizione 14.
Sia M una varietà, $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un suo ricoprimento di aperti e $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di mappe di classe C^1 da M a $[0, +\infty)$ tali che

$$\begin{cases} \mathrm{supp}_{\rho_\alpha} \subset O_\alpha \\ \text{Per ogni } x \in M \text{ esistono } O_{\alpha_1}, \ldots, O_{\alpha_{i_x}} \text{ tali che } \rho_\alpha(x) = 0 \text{ se } \alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i_x}\} \\ \sum_{i=1}^{i_x} \rho_{\alpha_i}(x) = 1 \text{ per ogni } x \in M \end{cases}$$

Allora $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ si dice **partizione dell'unità** subordinata a $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Lemma 18.
Siano X, Y spazi di Banach, $\mathbb{B} \subset X$ la sua palla unitaria e $f \in C(X, Y)$ limitata. Allora, f è compatta se e solo se è limite uniforme di mappa di rango finito.

Dimostrazione.
Supponiamo che f sia limite uniforme di una successione f_k di mappe di rango finito; in particolare, le f_k sono compatte, e dunque ogni $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}$ ha un'estratta $x_{k,1}$ tale che $f_1(x_{k,1})$ converga; a sua volta, $x_{k,1}$ avrà un'estratta $x_{k,2}$ tale che $f_2(x_{k-2})$, e così via; diagonalizzando, $f_k(x_{k,k}) \underset{k \to +\infty}{\to} y$, e dunque

$$\|f(x_{k,k}) - y\| \leq \|f(x_{k,k}) - f_k(x_{k,k})\| + \|f_k(x_{k,k}) - y\| \leq$$

$$\leq \|f - f_k\|_{C(B,X)} + \|f_k(x_{k,k}) - y\| \underset{k \to +\infty}{\to} 0$$

perciò $f(x_k)$ ha un'estratta convergente e dunque f è compatta.
Supponiamo viceversa che f sia compatta e, fissato $\varepsilon > 0$, ricopriamo $\overline{f(\mathbb{B})}$ con palle $B_\varepsilon(y)$ di raggio ε centrate in ogni suo punto y; per compattezza, se ne può estrarre un sottoricoprimento finito $\{B_{i,\varepsilon}(y_i)\}_{i=1}^{n_\varepsilon}$; se e_i è una partizione dell'unità subordinata a $\{B_{i,\varepsilon}(y_i)\}_{i=1}^{n_\varepsilon}$ è sufficiente porre $f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} e_i(f(x))y_i$:

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} e_i(f(x))f(x) - \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} e_i(f(x))y \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} e_i(f(x))\|f(x) - y\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} e_i(f(x)) = \varepsilon$$

□

Teorema 19 (Schauder)**.**
Sia X uno spazio di Banach, $\mathbb{B} \subset X$ la sua palla unitaria e $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ compatta. Allora esiste $x \in \mathbb{B}$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione.
In virtù del lemma 18, è sufficiente far vedere che f è limite uniforme di mappe di rango finito: ponendo f_ε come nella dimostrazione del lemma 18, $\overline{f_\varepsilon(\mathbb{B})} \subset \mathbb{B}$ per la convessità di $\mathbb{B}$; in realtà, essendo di rango finito, $\overline{f_\varepsilon(\mathbb{B})} \subset \mathbb{B} \cap (\mathbb{R}^{n_\varepsilon} \times \{0\})$, dunque per il teorema di Brouwer 17 la mappa $f|_{B\cap(\mathbb{R}^{n_\varepsilon}\times\{0\})}$ ha un punto fisso x_ε, ma essendo $x_\varepsilon \subset \overline{f(\mathbb{B})}$, che è compatto, a meno di estratte si avrà $x_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} x \in \overline{f_\varepsilon(\mathbb{B})} \subset \mathbb{B}$ e $f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon} \to 0 x_\varepsilon = x$. □

Teorema 20.
Siano M, N varietà di cui M è compatta, $W \subset N$ una sottovarietà chiusa tale che $\dim(M) + \dim(W) = \dim(N)$ *e F un'omotopia tra due mappe $f_0, f_1 \in C(M,N)$ trasversali a W tale che $f_t(\partial M) \cap W = \emptyset = f_t(M) \cap \partial W$.*
Allora, $\#f_0^{-1}(W) = \#f_1^{-1}(W) \mod 2$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, per trasversalità, $f^{-1}(W)$ è una 0-varietà compatta, dunque è finito; per il lemma 12 si può supporre $F \pitchfork W$, a meno di sostituirla con un'altra omotopia sufficientemente vicina da rispettare le ipotesi del teorema; dunque, $F^{-1}(W)$ è una 1-varietà con bordo

$$F^{-1}(W) \cap (M \times \{0\}) \sqcup F^{-1}(W) \cap (M \times \{1\}) = f_0^{-1}(W) \sqcup f_1^{-1}(W)$$

ma il bordo di ogni 1-varietà ha un numero pari di punti di bordo, quindi

$$0 = \#f_0^{-1}(W) + \#f_1^{-1}(W) \mod 2 = \#f_0^{-1}(W) - \#f_1^{-1}(W) \mod 2$$

□

Corollario 21.
Siano M, N, W *varietà di cui* N *connessa e* $\dim(M) + \dim(N) = \dim(W)$, F *un'omotopia tra due mappe* $f_0, f_1 \in C(M,N)$ *e* G *un'omotopia tra due mappe* $g_0, g_1 : W \to N$ *tali che* $f_i \pitchfork g_i$ *per* $i = 1, 2$ *e* $f_t(\partial M) \cap g_t(W) = f_t(M) \cap g_t(\partial W) = \emptyset$. *Allora*

$$\#\{(x,y) : f_0(x) = g_0(y)\} = \#\{(x,y) : f_1(x) = g_1(y)\} \mod 2$$

Dimostrazione.
La mappa $F \times G : (t,x,y) \to (F(t,x), G(t,y)) \in C(M \times W \to N \times N)$ è un'omotopia tra $(f \times g)_0 = F \times G(0,\cdot)$ e $(f \times g)_1 = F \times G(1,\cdot)$, entrambe trasversali alla diagonale Δ_N, dunque per il teorema 20

$$\#\{(x,y) : f_0(x) = g_0(y)\} \mod 2 = \#(f \times g)_0^{-1}(\Delta_N) \mod 2 =$$

$$= \#(f \times g)_1^{-1}(\Delta_N) \mod 2 = \#\{(x,y) : f_1(x) = g_1(y)\} \mod 2$$

□

Teorema 22.
Siano M, N *varietà compatte senza bordo della stessa dimensione di cui* N *connessa,* $f : M \to N$ *e* y *regolare per* f.
Allora, $\#f^{-1}(\{y\}) \mod 2$ *non dipende da* y.
Inoltre, se $f_t : M \to N$ *è un'omotopia, allora* $\#f_t^{-1}(\{y\}) \mod 2$ *non dipende da* t.

Dimostrazione.
Poiché y è regolare, $W := f^{-1}(\{y\})$ è trasversale a f; essendo poi N connessa, tutte le applicazioni costanti sono omotope tra loro, dunque si può applicare il corollario 21 per ottenere

$$\#f^{-1}(\{y_1\}) \mod 2 = \#\{x : f(x) = y_1\} = \#\{x : f(x) = y_2\} \mod 2 =$$

$$= \#f^{-1}(\{y_2\}) \mod 2$$

per ogni $y_1, y_2 \in N$.
Inoltre, se $F : M \times I \to N$ è un'omotopia tra f_0 e f_1, allora per ogni $t_0, t_1 \in I$ anche $F(t(t_1 - t_0) + t_0, x) : M \times I \to N$ è un'omotopia tra f_{t_0} e f_{t_1}, dunque per il teorema 20

$$\#f_{t_0}^{-1}(\{y\}) \mod 2 = \#f_{t_1}^{-1}(\{y\}) \mod 2$$

□

Definizione 15.
Sia M una varietà con carta locale $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.
M si dice **orientabile** se $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \to U_\alpha \cap U_\beta$ è tale che $\det\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)$ ha lo stesso segno per ogni $\alpha, \beta \in A$.

Osservazione 10.
Una n-varietà M è orientabile se e solo se esiste una n-forma differenziale mai nulla $\omega \in \Lambda^n(M)$.
Infatti, se M ha una n-forma ω mai nulla, allora prendendo $dx_1 \dots dx_n \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ si ha $\varphi_\alpha^*(dx_1 \dots dx_n) = f_\alpha \omega \in \Lambda^n(U_\alpha) \subset \Lambda^n(M)$ per una certa f_α che ha segno costante indipendentemente da α; dunque,

$$\det\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)(dx_1 \dots dx_n) = \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)^*(dx_1 \dots dx_n) =$$

$$= \varphi_\beta^{-1^*}(\varphi_\alpha^*(dx_1 \dots dx_n)) = \varphi_\beta^{-1^*}(f_\alpha \omega) = \frac{f_\alpha}{f_\beta} dx_1 \dots dx_n$$

con $\dfrac{f_\alpha}{f_\beta} > 0$.
Viceversa, essendo

$$\omega_\alpha := \varphi_\alpha^*(dx_1 \dots dx_n) = \underbrace{\varphi_\beta^*\left(\det\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)\right)}_{f_{\alpha,\beta}} \underbrace{\varphi_\beta^*(dx_1 \dots dx_n)}_{\omega_\beta}$$

per ipotesi $f_{\alpha,\beta}$ ha segno costante indipendentemente da α, β, dunque prendendo una partizione dell'unità ρ_α subordinata a U_α, la forma $\omega = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \omega_\alpha \in \Lambda^n(M)$ non si annulla mai, perché le ω_α hanno segno costante e le ρ_α non si annullano mai simultaneamente.

Lezione 6 – 10/11/2011

Definizione 16.
Sia M una varietà orientabile e $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^n(M)$ due forme differenziali mai nulle.
ω_1 e ω_2 **definiscono la stessa orientazione** se esiste $a(x) > 0$ tale che $\omega_1 = a\omega_2$, e si indica $\omega_1 \sim \omega_2$.

Osservazione 11.
Se M è connessa esistono due sole possibili orientazioni, perché se $\omega_1 = a\omega_2$ con $a(x) \neq 0$, allora $a(x) > 0$ oppure $a(x) < 0$.

Definizione 17.
Siano $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ due basi di $\mathbb{R}^n$.
e e f **definiscono la stessa orientazione** se la matrice di cambiamento di base M_{ef} ha determinante positivo, e si indica $e \sim f$.

Definizione 18.
Sia M una varietà orientata con $\omega \in \Lambda^n(M)$ mai nulla e sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di T_xM.
e si dice **positivamente orientata** se $\omega(x)(e_1, \dots, e_n) > 0$.

Osservazione 12.
Se M è una varietà orientata, $\gamma : [0,1] \to M$ una curva $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di $T_{\gamma(0)}M$ positivamente orientata e $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ è una base di $T_{\gamma(t)}M$ che varia con continuità al variare di $t \in [0,1]$, allora $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ è positivamente orientata di; infatti, se $\omega \in \Lambda^n(M)$ è una forma mai nulla, $t \to \omega(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ è una funzione continua su $[0,1]$ mai nulla e positiva in 0, dunque positiva su tutto $[0,1]$.

Lemma 23.
Sia M una varietà, $\gamma \subset M$ una curva regolare e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di $T_{\gamma(0)}M$. Allora esistono $e_1(t), \ldots, e_n(t) \in C^1([0,1], TM)$ tali che $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ è una base di $T_{\gamma(t)}M$.

Dimostrazione.
Supponiamo che γ non si autointersechi e consideriamo il campo vettoriale $V(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$, definito su $\mathrm{Im}(\gamma)$ ed esteso ad un suo intorno tubolare e poi su M in modo che abbia supporto compatto; dunque, il flusso $\varphi_t(x) = \varphi(t,x)$ associato all'equazione differenziale $\dot{q} = V(q)$ è un diffeomorfismo con $\varphi_t(\gamma(s)) = \gamma(t+s)$, dunque è sufficiente porre $e_i(t) = D_{\gamma(0)}\varphi_t(e_i)$.
Se invece γ si autointerseca, consideriamo la curva $\widetilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), t) \subset M \times \mathbb{R}$ e definiamo il campo vettoriale $\widetilde{V}(\gamma(t)) = \dot{\widetilde{\gamma}}(t) = (\dot{\gamma}(t), 1)$ esteso a $M \times \mathbb{R}$ analogamente a prima; in questo caso, se $\psi_t(x)$ è il flusso associato all'equazione autonoma $\begin{cases} \dot{q} = \widetilde{V}(q,t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$, basterà porre $e_i(t) = D_{(\gamma(0),0)}\psi\left(\widetilde{e}_i\right)$. $\square$

Proposizione 24.
Sia M una n-varietà.
M è orientabile se e solo se per ogni coppia di curve γ, γ' su M con stessi estremi e per ogni coppia di basi lisce $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}, \{e'_1(t), \ldots, e'_n(t)\}$ di $T_{\gamma(t)}M$ e $T_{\gamma'(t)}M$ rispettivamente, con $e_i(0) = e'_i(0)$ si ha $\{e_1(1), \ldots, e_n(1)\} \sim \{e'_1(1), \ldots, e'_n(1)\}$.

Dimostrazione.
Supponiamo che M sia orientabile; allora, $t \to \omega(\gamma(t))(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ e $t \to \omega(\gamma(t))(e'_1(t), \ldots, e'_n(t))$ sono due funzioni che non cambiano segno e hanno lo stesso segno in 0, dunque devono avere lo stesso segno anche in 1; essendo poi $\omega(\gamma(t))(e_1(t), \ldots, e_n(t)) = \det(M)\omega(\gamma(t))(e'_1(t), \ldots, e'_n(t))$, dove M è la matrice di passaggio da una base all'altra, si ha $\det M > 0$ e cioè $\{e_1(1), \ldots, e_n(1)\} \sim \{e'_1(1), \ldots, e'_n(1)\}$.
Viceversa, se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ è un atlante su $M \ni x$, per ogni base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di T_xM e per ogni $\alpha \in A$ prendo $y_\alpha \in U_\alpha$, una curva γ tra x e y_α e una base liscia su γ costruita come nel lemma 23; se $\{D_{y_\alpha}\varphi_\alpha e_1(1), \ldots, D_{y_\alpha}\varphi_\alpha e_n(1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ con la stessa orientazione della base canonica, poniamo $\widetilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha$, altrimenti componiamo con un diffeomorfismo che scambia l'orientazione; in questo modo, l'atlante $\{(U_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ è positivamente orientato, perché per ogni $y \in U_\alpha \cap U_\beta$ le basi $\{D_y\widetilde{\varphi}_\alpha e_1(1), \ldots, D_y\widetilde{\varphi}_\alpha e_n(1)\}$ e $\{D_y\widetilde{\varphi}_\beta e_1(1), \ldots, D_y\widetilde{\varphi}_\beta e_n(1)\}$ definiscono entrambe la stessa orientazione della base canonica di $\mathbb{R}^n$, dunque la stessa, e quindi $\det\left(\widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1}\right) > 0$. $\square$

Definizione 19.
Siano M, N orientabili di cui M è compatta, $W \subset N$ una sottovarietà orientabile chiusa tale che $\dim(M) + \dim(W) = \dim(N)$ e sia $f \in C^1(M, N)$ trasversale a W tale che $f(\partial M) \cap W = \emptyset = f(M) \cap \partial W$.
Il **numero di intersezione** di f e W è

$$f \cdot W = \sum_{x \in f^{-1}(W)} \operatorname{sign}(\omega(x)(f_*(e_1), \ldots, f_*(e_n), \eta_1, \ldots, \eta_m))$$

per una qualsiasi $0 < \omega \in \Lambda^{n+m}(N)$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base positivamente orientata di T_xM e $\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ base positivamente orientata di $T_f(x)W$.
Se M, N, W sono varietà orientabili di cui M, W sono compatte e tali che $\dim(M) + \dim(W) = \dim(N)$, e $f \in C^1(M, N)$, $g \in C^!(W, N)$ sono tali che $f \pitchfork g$ e $f(\partial M) \cap g(W) = \emptyset = f(M) \cap g(\partial W)$, allora il **numero di intersezione** di f e g è

$$f \cdot g = \sum_{x \in f^{-1}(M) \cap g^{-1}(W)} \operatorname{sign}(\omega(x)(f_*(e_1), \ldots, f_*(e_n), g_*(\eta_1), \ldots, g_*(\eta_m)))$$

per una qualsiasi $0 < \omega \in \Lambda^{n+m}(N)$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base positivamente orientata di T_xM e $\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ base positivamente orientata di $T_{f(x)}W$.

Osservazione 13.
La definizione di numero di intersezione non dipende dalla scelta della forma ω né delle basi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$.

Teorema 25.
*Siano M, N varietà orientabili di cui M è compatta, $W \subset N$ una sottovarietà orientabile chiusa tale che $\dim(M) + \dim(W) = \dim(N)$ e sia $f_t : M \to N$ un'omotopia tale che $f_t \pitchfork W$ e $f_t(\partial M) \cap W = \emptyset = f_t(M) \cap \partial W$.
Allora $f_0 \cdot W = f_1 \cdot W$.*

Dimostrazione.
$F^{-1}(W)$ è una 1-varietà, cioè unione di circonferenze e segmenti, con bordo $\partial F^{-1}(W) = f_0^{-1}(W) \times \{0\} \cup f_1^{-1}(W) \times \{1\}$; se $(x, 0)$ è l'estremo di una curva di $\partial F^{-1}(W)$ e l'altro estremo è in $f_0^{-1}(W) \times \{0\}$, sia γ una parametrizzazione di questa curva; se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di T_xM, allora per trasversalità $\{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), \dot\gamma(0)\}$ è una base di $T_{(x,0)}M \times [0, 1]$ e dunque si può estendere in maniera continua a una base $\{\widetilde{e}_1(t), \ldots, \widetilde{e}_n(t), \dot\gamma(t)\}$ su $T_{\gamma(t)}M \times [0, 1]$; non è restrittivo supporre che $\widetilde{e}_i(t) \perp \dot\gamma(t)$, e cioè che $\{\widetilde{e}_1(t), \ldots, \widetilde{e}_n(t)\}$ sia una base di $T_{\gamma(t)}M$; poiché $\{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), \dot\gamma(0)\}$ definisce la stessa orientazione di $\{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, 1)\}$ e, per l'orientabilità, di $\{\widetilde{e}_1(1), \ldots, \widetilde{e}_n(1), \dot\gamma(1)\}$, ma diversa da quella di $\{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), \dot\gamma(1)\}$, allora $\{\widetilde{e}_1(1), \ldots, \widetilde{e}_n(t)\}$ non può essere orientata allo stesso modo di $\{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0)\}$; inoltre, in questo caso $D\gamma(t)F\left(\dot\gamma(t)^\perp\right) \oplus T_{F(\gamma(t))} = T_{F(\gamma(t))}N$, quindi $t \to \operatorname{sign}\left(\omega(\gamma(t))\left(F_*\left(\gamma^\perp(t)\right), w(t)\right)\right)$ è costante in t, ove $w(t) = \{w_1(t), \ldots, w_n(t)\}$ è un'estensione continua di una base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ di $T_{F(x,0)}W$, dunque

$$\operatorname{sign}(\omega(x)(f_*(e_1), \ldots, f_*(e_n), w_1, \ldots, w_n)) =$$

$$= \operatorname{sign}(\omega(\gamma(t))(f_*(\widetilde{e}_1(t)), \dots, f_*(\widetilde{e}_n(t)), w_1(t), \dots, w_n(t)))$$

ma $\{\widetilde{e}_1(1), \dots, \widetilde{e}_n(1)\}$ è negativamente orientata, dunque il contributo nella sommatoria è lo stesso, e lo stesso accade se entrambi i punti del bordo sono su $f_1^{-1}(W) \times \{1\}$; se invece la curva ha un punto del bordo su ognuno dei due lati, si ragiona analogamente ma stavolta $\dot{\gamma}(1)$ non cambia l'orientazione delle basi su T_xM e dunque si conclude come prima e pertanto, sommando, si ottiene la tesi. □

Teorema 26.
Siano M, N, W varietà orientabili di cui M, W sono compatte e tali che $\dim(M) + \dim(W) = \dim(N)$, e siano $f_t : M \to N$ e $g_t : M \to N$ omotopie tali che $f_i \pitchfork g_i$ per $i = 1, 2$ e $f_t(\partial M) \cap g_t(W) = \emptyset = f_t(M) \cap g_t(\partial W$
Allora $f_0 \cdot g_0 = f_1 \cdot g_1$.

Dimostrazione.
A meno di cambiare le omotopie con altre arbitrariamente vicine, si può supporre $f_t \pitchfork g_t$; dunque, $f_t \times g_t : M \times W \to N \times N \supset \Delta_N$ soddisfa le ipotesi del teorema 25 e dunque

$$f_0 \cdot g_0 = (-1)^{\dim(W)}(f_0 \times g_0) \cdot \Delta = (-1)^{\dim(W)}(f_1 \times g_1) \cdot \Delta = f_1 \cdot g_1$$

□

Definizione 20.
Siano M, N varietà orientabili di cui M è compatta, $f \in C^1(M, N)$ e $y \in N$ regolare per f.
Il **grado** di f è $\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \operatorname{sign} f_* = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \det(D_x f)$.

Teorema 27.
Siano M, N varietà orientabili di cui M è compatta, $f \in C^1(M, N)$ e $y \in N$ regolare per f.
Allora $\deg f$ è ben definito, cioè non dipende dalla scelta di y, ed è invariante per omotopie.

Dimostrazione.
Presi $y_0, y_1 \in Y$ regolari per f, applichiamo il teorema 26 con $f_t \equiv f$ e le applicazioni costanti $y_t : [0, 1] \to N$ costruite con una curva tra y_0 e y_1, perché la regolarità dei punti dà $f \pitchfork y_i$ per $i = 0, 1$; dunque, $\deg f = f \cdot y_0 = f \cdot y_1$; analogamente, per un'omotopia f_t si ottiene $\deg f_0 = f_0 \cdot y = f_1 \cdot y = \deg f_1$. □

Esempio 2.

1. Per ogni $f : M \to N, g : W \to N$ si ha $g \cdot f = (-1)^{mn} f \cdot g$.
2. Se $f \times g = M \times W \to N \times N$, allora $(f \times g) \cdot \Delta_N = (-1)^{\dim(W)} f \cdot g$, a seconda dell'orientazione scelta su Δ_N.

Lezione 7 – 11/11/2011

Definizione 21.
Sia M una $n-1$-varietà orientabile, $f \in C(M, \mathbb{R}^n)$ e $y \notin f(M)$.
Il **grado** di f in y è $\deg_y f := \deg\left(\frac{f-y}{\|f-y\|} : M \to \mathbb{S}^{n-1}\right)$.

Osservazione 14.
Se $M \pitchfork \mathbb{R}^k \times \{0\}$ e $f - \mathrm{Id} : M \to \mathbb{R}^k \times \{0\}$, allora per ogni $y \in \mathbb{R}^k \times \{0\} \backslash f(M)$ si ha $\deg_y f = \deg_y f|_{M \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})}$.

Definizione 22.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e limitato $x \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$, $p : S_\varepsilon(x) \to \partial\Omega$ la proiezione su $\partial\Omega$, $f \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$.
Il **grado** di f in y è $\deg_y f := \deg_y\left(f \circ p : S_\varepsilon(x) \to \mathbb{R}^n\right)$.

Lemma 28.
Sia X uno spazio di Banach, $\Omega \subset X$ un aperto convesso e limitato e $f \in C\left(\overline{\Omega}, X\right)$ tale che $\varphi(x) := f(x) - x$ è compatta.
Allora $f(\partial\Omega)$ è chiuso.

Dimostrazione.
Posta $\varphi := f - \mathrm{Id}$, prendiamo $x_k \in \partial\Omega$ tale che $f(x_k) = x_k + \varphi(x_k) \underset{k\to+\infty}{\to} y$; per compattezza $\varphi(x_k)$ convergerà a meno di estratte, inoltre, essendo $\partial\Omega$ chiuso, $x_k = y - \varphi(x_k) \underset{k\to+\infty}{\to} z \in \partial\Omega$, e infine per la continuità di f si ha $f(x_k) \underset{k\to+\infty}{\to} f(z) \in f(\partial\Omega)$, dunque $f(\partial\Omega)$ è chiuso. $\square$

Definizione 23.
Sia X uno spazio di Banach, $\Omega \subset X$ un aperto convesso e limitato, $f \in C\left(\overline{\Omega}, X\right)$ tale che $\varphi := f - \mathrm{Id}$ è compatta e $y \notin f(\partial\Omega)$.
Allora, se φ_ε è una mappa di rango finito che approssima φ per $\varepsilon \in (0, d(y, f(\partial\Omega)))$, $V_\varepsilon \subset \varphi_\varepsilon\left(\overline{\Omega}\right)$ e $f_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varphi_\varepsilon$, il **grado di Leray-Schauder** di f in y è $\deg(f, \Omega, y) := \deg_y\left(f_\varepsilon|_{\overline{\Omega} \cap V_\varepsilon}\right)$.

Lemma 29.
Sia X uno spazio di Banach, $\Omega \subset X$ un aperto convesso e limitato, $f \in C\left(\overline{\Omega}, X\right)$ tale che $\varphi(x) := f - \mathrm{Id}$ è compatta e $y \notin f(\partial\Omega)$.
Allora, la definizione di grado di Leray-Schauder non dipende dalla mappa di rango finito che approssima φ.

Dimostrazione.
Se $\varphi_\varepsilon : \overline{\Omega} \to V_\varepsilon$ e $\psi_\nu : \overline{\Omega} \to V_\nu$ sono due approssimanti, allora $t \to t\psi_\nu + (1-t)\varphi_\varepsilon$ è un'omotopia tra ψ_ν e φ_ε in $\widehat{V} := V_\varepsilon + V_\nu$; inoltre, se $y \notin f(\partial\Omega)$, non appartiene neanche all'immagine di $\partial\Omega$ attraverso $f_\varepsilon := \mathrm{Id} + \varphi_\varepsilon$ e $f_\nu := \mathrm{Id} + \psi_\nu$, né attraverso loro combinazioni convesse, per ε, ν sufficientemente piccoli, e dunque $t \to \frac{tf_\varepsilon + (1-t)f_\nu - y}{\|tf_\varepsilon + (1-t)f_\nu - y\|}$ è un'omotopia tra $\frac{f_\varepsilon - y}{\|f_\varepsilon - y\|}$ e $\frac{f_\nu - y}{\|f_\nu - y\|}$, dunque per l'osservazione precedente

$$\deg_y\left(f_\varepsilon|_{\overline{\Omega} \cap V_\varepsilon}\right) = \deg_y\left(\frac{f_\varepsilon - y}{\|f_\varepsilon - y\|}\right) = \deg_y\left(\frac{f_\nu - y}{\|f_\nu - y\|}\right) = \deg_y\left(f_\nu|_{\overline{\Omega} \cap V_\nu}\right)$$

$\square$

Corollario 30.
Sia X uno spazio di Banach, $\Omega \subset X$ un aperto convesso e limitato, $f \in C\left(\overline{\Omega}, X\right)$ tale che $\varphi(x) := f(x) - x$ è compatta e $y \notin f\left(\overline{\Omega}\right)$.
Allora $\deg(f, \Omega, y) = 0$.

Dimostrazione.
Se $y \notin f\left(\overline{\Omega}\right)$, la mappa $\dfrac{f-y}{\|f-y\|}$ è ben definita su tutto $\overline{\Omega}$ e dunque omotopa alla mappa costante $\dfrac{f(x_0)-y}{\|f(x_0)-y\|}$, che ovviamente ha grado 0. $\square$

Teorema 31 (Schauder)**.**
Sia X uno spazio di Banach, $\Omega \subset X$ un aperto convesso e limitato e $\varphi : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ una mappa compatta.
Allora esiste $x \in \overline{\Omega}$ tale che $\varphi(x) = x$.

Dimostrazione.
Se per assurdo φ non avesse punti fissi, allora 0 non sarebbe nell'immagine di $f := \mathrm{Id} - \varphi$, ma allora per il corollario 30 si avrebbe $\deg(f, \Omega, 0) = 0$; tuttavia, perché prendendo $t \to x - t\varphi(x)$ si otterrebbe che f è omotopa all'identità, che ha grado 1, in contraddizione con l'invarianza omotopica del grado. $\square$

Teorema 32 (Formula integrale del grado)**.**
Siano M, N n-varietà orientabili, di cui N è compatta, $f \in C^1(M, N)$ e $\omega \in \Lambda^n(N)$.
Allora, $\displaystyle\int_M f^*(\omega) = \deg f \int_N \omega$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, indicando con C_f l'insieme dei punti critici di f, si ha $f^*(\omega)(x) = 0$ per ogni $x \in C_f$, mentre $f(C_f)$ ha misura nulla in M, dunque $\displaystyle\int_M f^*(\omega) = \int_{M \setminus C_f} f^*(\omega)$ e $\displaystyle\int_N \omega = \int_{N \setminus f(C_f)} \omega$; per ogni $y \in N \setminus f(C_f)$ si ha $f^{-1}(\{y\}) = \{z_1, \dots, z_{k_y}\}$, ed esistono degli opportuni intorni O_{z_i} di z_i e O_y di y tali che $f|_{O_{z_i}} : O_{z_i} \to O_y$ è un diffeomorfismo e $f^{-1}(O_y) = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{k_y} O_{z_i}$, dunque prendendo un sottoricoprimento localmente finito O_{y_α} di O_y e una partizione dell'unità e_α subordinata a O_{y_α} si ottiene

$$\int_M f^*(\omega) = \int_{M \setminus C_f} f^*(\omega) = \sum_\alpha (e_\alpha \circ f) \int_{M \setminus C_f} f^*(\omega) =$$

$$= \sum_\alpha \sum_{i=1}^{k_{y_\alpha}} \int_{O_{z_i}} (e_\alpha \circ f) f^*(\omega) = \sum_\alpha \sum_{i=1}^{k_{y_\alpha}} \mathrm{sign}(f_*) \int_{\omega_{y_\alpha}} e_\alpha \omega =$$

$$= \deg f \sum_{\alpha} \int_{O_{y_\alpha}} e_\alpha \omega = \deg f \int_{N \setminus f(C_f)} \omega = \deg f \int_N \omega$$

$\square$

Corollario 33.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto tale che* $\partial\Omega$ *è una sottovarietà liscia,* $f \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *e* $y \notin f\left(\overline{\Omega}\right)$.
Allora $\deg(f, \Omega, y) = 0$.

Dimostrazione.
Se $y \notin f\left(\overline{\Omega}\right)$, allora $\frac{f-y}{\|f-y\|}$ è ben definito su $\overline{\Omega}$, dunque applicando la formula integrale del grado 32 con una $\omega \in \Lambda^{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ mai nulla e il teorema di Stokes si ottiene

$$\deg(f, \Omega, y) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \deg\left(\frac{f-y}{\|f-y\|}\right) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{f-y}{\|f-y\|}\right)^* (\omega) =$$

$$= \int_\Omega d\left(\left(\frac{f-y}{\|f-y\|}\right)^* (\omega)\right) = \int_\Omega \left(\frac{f-y}{\|f-y\|}\right)^* (d\omega) = 0$$

$\square$

Definizione 24.
Siano M e W varietà compatte orientabili di dimensione rispettivamente n e m e $f \in C^1\left(M, \mathbb{R}^{n+m+1}\right)$ e $g \in C^1\left(N, \mathbb{R}^{n+m+1}\right)$ tali che $f(x) \neq g(y)$ per ogni $x \in M, y \in N$.
Il **numero di link** tra f e g è $\mathrm{link}(f, g) := (-1)^m \deg\left(\frac{f-g}{\|f-g\|} : M \times N \to \mathbb{S}^{n+m}\right)$.

Esempio 3.

1. Se M, N, W sono varietà compatte orientabili tali che $\dim(M) = \dim(N) = \dim(W)$ e $f : M \to N$ e $g : N \to W$, allora $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$.

2. Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è un polinomio di grado n, allora la sua estensione della sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ in sé ha grado n.

3. Se $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sono due polinomi di grado rispettivamente n e m, allora la mappa $\frac{f}{g} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ha grado $\max\{n, m\}$.

Lezione 8 – 15/11/2011

Osservazione 15.
Poiché una mappa g da una 0-varietà connessa in $\mathbb{R}^{n+1}$ è costante, in questo caso la definizione di numero di link equivale a quella di grado: se $g \equiv y$, allora $\mathrm{link}(f, g) = \deg_y f$.

Definizione 25.
Sia M una varietà, $\omega \in \Lambda^k(M)$ e $v \in \mathrm{Vec}(M)$.
Il **prodotto interno** di v e ω è la forma differenziale $i_v(\omega) \in \Lambda^{k-1}(M)$ definita da $i_v(\omega)(x)(v_1, \ldots, v_{k-1}) := \omega(x)(v, v_1, \ldots, v_{k-1})$.

Osservazione 16.
Per ogni $\omega_\alpha \in \Lambda^\alpha(M), \omega_\beta \in \Lambda^\beta(M)$ si ha $i_\alpha(\omega_\alpha\omega_\beta) = i_v(\omega_\alpha)\omega_\beta + (-1)^\alpha \omega_\alpha i_v(\omega_\beta)$.

Definizione 26.
Sia $\omega = dx_1 \ldots dx_{k+1} \in \Lambda^{k+1}\left(\mathbb{R}^{k+1}\right)$, $v(x) = (x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \mathrm{Vec}\left(\mathbb{R}^{k+1}\right)$ e $i : \mathbb{S}^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ l'inclusione.
Si definisce $\widehat{\sigma} = i^*(i_v\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}x_i dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_{k+1} \in \Lambda^k\left(\mathbb{S}^k\right)$.

Osservazione 17.
La misura k-dimensionale di $\mathbb{S}^k$ è $S_k := \displaystyle\int_{\mathbb{S}^k} \widehat{\sigma}$, dunque per ogni $f \in C^1\left(M, \mathbb{S}^k\right)$ si ha $\deg f = \dfrac{1}{S_k}\displaystyle\int_M f^*\left(\widehat{\sigma}\right)$; posta poi $\pi(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ e $\sigma = \dfrac{1}{S_k}\pi^*\left(\widehat{\sigma}\right)$, per ogni $f \in C^1\left(M, \mathbb{R}^{n+m+1}\right)$ e $g \in C^1\left(M, \mathbb{R}^{n+m+1}\right)$ il numero di link si può scrivere come

$$\mathrm{link}(f,g) = \frac{(-1)^m}{S_{n+m}}\int_{M\times N}\left(\frac{f-g}{\|f-g\|}\right)^*\left(\widehat{\sigma}\right) = (-1)^m\int_{M\times N}(f-g)^*(\sigma)$$

e inoltre

$$\sigma = \frac{1}{S_k}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}d\left(\frac{x_1}{\|x\|}\right)\ldots\widehat{d\left(\frac{x_i}{\|x\|}\right)}\ldots d\left(\frac{x_{k+1}}{\|x\|}\right) =$$

$$= \frac{1}{S_k}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\left(\frac{1}{\|x\|}dx_1 + x_1 d\left(\frac{1}{\|x\|}\right)\right)\ldots\widehat{\left(\frac{1}{\|x\|}dx_i + x_i d\left(\frac{1}{\|x\|}\right)\right)}\ldots\left(\frac{1}{\|x\|}dx_{k+1} + x_{k+1} d\left(\frac{1}{\|x\|}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{S_k}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{\|x\|^{k+1}}dx_1\ldots\widehat{dx_i}\ldots dx_{k+1} +$$

$$+\frac{1}{S_k}\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i+j-2}x_i x_j d\left(\frac{1}{\|x\|}\right)dx_1\ldots\widehat{dx_j}\ldots\widehat{dx_i}\ldots dx_{k+1} +$$

$$+\frac{1}{S_k}\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=i+1}^{k+1}(-1)^{i+j-1}x_i x_j d\left(\frac{1}{\|x\|}\right)dx_1\ldots\widehat{dx_i}\ldots\widehat{dx_j}\ldots dx_{k+1} =$$

$$= \frac{1}{S_k}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{\|x\|^{k+1}}dx_1\ldots\widehat{dx_i}\ldots dx_{k+1}$$

In particolare, per $k=2$ si ottiene $\sigma = \dfrac{1}{4\pi\|x\|^3}(x_1dx_2dx_3 - x_2dx_1dx_3 + x_3dx_1dx_2)$.

Proposizione 34 (Formula di Gauss)**.**
Siano $f \in C^1\left(0,1],\mathbb{R}^3\right), g \in C^1\left([0,1],\mathbb{R}^3\right)$ *due curve tali che* $f(x) \neq g(y)$ *per ogni* $x, y \in [0,1]$. *Allora*

$$\operatorname{link}(f,g) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^1 dt \int_0^1 ds \frac{\det(f(t)-g(s), f'(t), g'(s))}{\|f(t)-g(s)\|^3}$$

Dimostrazione.
Se $h = (h_1(t,s), h_2(t,s), h_3(t,s)) : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$, allora

$$h^*(\sigma) h^*(x_1 dx_2 dx_3 - x_2 dx_1 dx_3 + x_3 dx_1 dx_2) =$$

$$= h_1(t,s) dh_2(t,s) dh_3(t,s) - h_2(t,s) dh_1(t,s) dh_3(t,s) + h_3(t,s) dh_1(t,s) dh_2(t,s) =$$

$$= h_1(t,s)\left(\frac{\partial h_2}{\partial t}(t,s)\frac{\partial h_3}{\partial s}(t,s) - \frac{\partial h_2}{\partial s}(t,s)\frac{\partial h_3}{\partial t}(t,s)\right) dtds -$$

$$- h_2(t,s)\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}(t,s)\frac{\partial h_3}{\partial s}(t,s) - \frac{\partial h_1}{\partial s}(t,s)\frac{\partial h_3}{\partial t}(t,s)\right) dtds +$$

$$+ h_3(t,s)\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}(t,s)\frac{\partial h_2}{\partial s}(t,s) - \frac{\partial h_1}{\partial s}(t,s)\frac{\partial h_2}{\partial t}(t,s)\right) dtds =$$

$$= \det\left(h(t,s), \frac{\partial h}{\partial t}(t,s), \frac{\partial h}{\partial s}(t,s)\right) dsdt$$

dunque, prendendo $h(t,s) = f(t) - g(s)$ e applicando l'osservazione precedente, si ottiene la tesi. $\square$

Osservazione 18.
In dimensione maggiore, vale un risultato analogo alla proposizione 34: se $(t_1,\ldots,t_n)$ sono coordinate locali su M e $(s_1,\ldots,s_m)$ coordinate locali su N, allora

$$(-1)^m (f-g)^*(\sigma) = \frac{\det\left(f(t)-g(s), \frac{\partial f}{\partial t_1}(t), \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_n}(t), \frac{\partial g}{\partial s_1}(s), \ldots, \frac{\partial g}{\partial s_m}(s)\right)}{S_{m+n+1}\|f(t)-g(s)\|^{m+n+1}}$$

Proposizione 35.
Sia $F \in \operatorname{Vec}(\mathbb{R}^n)$ *con uno zero non degenere in* 0 *e* $\varepsilon > 0$ *tale che* $F|_{B_\varepsilon(0)\setminus\{0\}} \neq 0$.
Allora $\deg\left(\left.\frac{F}{\|F\|}\right|_{S_\varepsilon(0)}\right) = \operatorname{sign}\left(\det\left(\frac{\partial F}{\partial x}(0)\right)\right)$.

Dimostrazione.
La mappa $f_t(x) = \begin{cases} \frac{F(tx)}{t} & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(0) & \text{se } t = 0 \end{cases}$ è un'omotopia tra F e $\frac{\partial F}{\partial x}(0)x$, dunque $\frac{f_t}{\|f_t\|}$ è un'omotopia tra $\left.\frac{F}{\|F\|}\right|_{S_\varepsilon(0)}$ e $\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0)x}{\|\frac{\partial F}{\partial x}(0)x\|}\right|_{S_\varepsilon(0)}$; inoltre, esiste un'omotopia A_t nello spazio delle matrici invertibili tra $\frac{\partial F}{\partial x}(0)$ e una matrice orto-

gonale A, pertanto $\dfrac{A_t x}{\|A_t x\|}$ è un'omotopia tra $\left.\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(0)x}{\|\frac{\partial F}{\partial x}(0)x\|}\right|_{S_\varepsilon(0)}$ e $\dfrac{Ax}{\|Ax\|} = \dfrac{Ax}{\varepsilon}$, e quest'ultima mappa ha per grado $\operatorname{sign}(\det(A)) = \operatorname{sign}\left(\det\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(0)\right)\right)$. □

Teorema 36.
Sia B una $n+1$-varietà con bordo, N una m-varietà con bordo e $f \in C^1\left(B, \mathbb{R}^{n+m+1}\right)$, $g \in C^1\left(N, \mathbb{R}^{n+m+1}\right)$ tali che $f(\partial B) \cap g(N) = \emptyset$.
Allora $\operatorname{link}(f|_{\partial B}, g) = f \cdot g$.

Dimostrazione.
A meno di perturbazioni arbitrariamente piccole, si può supporre $f \pitchfork g$ e 0 regolare per $f-g$, dunque $(f-g)^{-1}(0) = \{z_1, \dots, z_k\} \subset (B \backslash \partial B) \times N$; quindi, scegliendo intorni disguinti O_i di z_i, si ha $(f-g)^*(\sigma) \in \Lambda^{n+m}\left(B \times N \backslash \bigcup_{i=1}^k O_i\right)$ e perciò si ottiene, dal teorema di Stokes,

$$0 = \int_{B \times N \backslash \bigcup_{i=1}^k O_i} d((f-g)^*(\sigma)) = \int_{\partial\left(B \times N \backslash \bigcup_{i=1}^k O_i\right)} (f-g)^*(\sigma) =$$

$$= \int_{\partial B \times N} (f-g)^*(\sigma) - \sum_{i=1}^k \int_{\partial O_i} (f-g)^*(\sigma)$$

e dunque, se $z_i = (x_i, y_i)$, per ogni base positivamente orientata $e_1, \dots, e_{n+1}$ di $T_{x_i}B$ in x_i e $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $T_{y_i}N$ in y_i, si ottiene

$$\operatorname{link}(f,g) = (-1)^m \int_{\partial B \times N} (f-g)^*(\sigma) = (-1)^m \sum_{i=1}^k \int_{\partial O_i} (f-g)^*(\sigma) =$$

$$= (-1)^m \sum_{i=1}^k \frac{1}{S_{m+n}} \int_{\partial O_i} \left(\frac{f-g}{\|f-g\|}\right)^* (\widehat{\sigma}) = (-1)^m \sum_{i=1}^k \deg\left(\left.\frac{f-g}{\|f-g\|}\right|_{\partial O_i}\right) =$$

$$= (-1)^m \sum_{i=1}^k \operatorname{sign}(\det D_{z_i}(f-g)) =$$

$$= (-1)^m \sum_{i=1}^k \operatorname{sign}(\omega(z_i)(f^*(e_1), \dots, f^*(e_{n+1}), -g^*(v_1), \dots, -g^*(v_m))) =$$

$$= \sum_{i=1}^k \operatorname{sign}(\omega(z_i)(f^*(e_1), \dots, f^*(e_{n+1}), g^*(v_1), \dots, g^*(v_m))) = f \cdot g$$

ove il quartultimo passaggio segue dalla proposizione 35. □

Lezione 9 – 17/11/2011

Proposizione 37.
Sia M una varietà compatta orientabile compatta senza bordo e $V \in \mathrm{Vec}(M)$. Allora $V \cdot M$ non dipende da V.

Dimostrazione.
Se $V_1, V_2 \in \mathrm{Vec}(M)$, allora $V_t := (1-t)V_1 + tV_2$ è un'omotopia tra V_1 e V_2, dunque $V_1 \cdot M = V_2 \cdot M$ □

Definizione 27.
Sia M una varietà e $M \hookrightarrow TM$ la 0-sezione. La **caratteristica di Eulero-Poincaré** di M è $\chi(M) = M \cdot M$.

Definizione 28.
Sia M una varietà e $\varphi \in C^1(M, \mathbb{R})$ tale che $D_x^2\varphi : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare non degenere per ogni x tale che $D_x\varphi = 0$.
φ si dice **funzione di Morse**.

Osservazione 19.
In generale, $D_x^2\varphi$ non è definita su T_xM perché se $\gamma(0) = x$ allora

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}D_x\varphi\dot{\gamma}(t) = D_x\varphi\ddot{\gamma}(t) + \langle D^2x\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle$$

dipende anche da $\ddot{\gamma}(t)$ oltre che da $\dot{\gamma}(t)$.

Definizione 29.
Sia $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una funzione di Morse.
L'**indice di Morse** di $D_x^2\varphi$ è

$$\mathrm{Ind}\, D_x^2\varphi = \max\left\{\dim(E) : E \subset T_xM \text{ tale che } D_x^2\varphi \text{ è definita negativa}\right\}$$

Definizione 30.
Sia M una varietà. Il **cofibrato tangente** ad M è $T^*M = \displaystyle\bigcup_{x \in M} (T_xM)^*$.

Osservazione 20.
Sia M una varietà e $\varphi : M \to \mathbb{R}$.
φ è una funzione di Morse se e solo se $D_x\varphi \pitchfork M$, ove M è intesa come 0-sezione di T^*M.

Proposizione 38.
*Sia M una varietà e $\varphi \in C^1(M, \mathbb{R})$.
Allora esiste una funzione di Morse $\widetilde{\varphi} : M \to \mathbb{R}$ arbitrariamente vicina a φ (rispetto alla topologia C^1).*

Dimostrazione.
Posta $\varphi_l(x) = \varphi(x) + \langle l, x\rangle$, si ha $D_x\varphi_l = D_x\varphi + l$, che è trasversale a T^*M e quindi, per la proposizione 7, $D_x\varphi_l \pitchfork M$ per q.o. l, in particolare per valori arbitrariamente vicini a 0, dunque φ_l è una famiglia di funzioni di Morse arbitrariamente vicina a φ. □

Proposizione 39.
Sia M una varietà compatta senza bordo e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una funzione di Morse.
Allora $\chi(M) = \sum_{x \in C_\varphi} (-1)^{\mathrm{Ind}\, D_x^2 \varphi}$, dove $C_\varphi = \{x \in M : D_x\varphi = 0\}$.

Dimostrazione.
Se $M \subset \mathbb{R}^n$, allora T_xM è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ per ogni $x \in M$, dunque $D_x\varphi : T_xM \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare e quindi per ogni $x \in M$ esiste un'unico $\nabla_x\varphi \in T_xM$ tale che $D_x\varphi(\xi) = \langle \nabla_x\varphi, \xi \rangle$ per ogni $\xi \in T_xM$; dunque, $\nabla\varphi : x \to \nabla_x\varphi$ è un campo vettoriale su M trasversale alla 0-sezione, e quindi

$$\chi(M) = \nabla\varphi \cdot M = \sum_{\{x : \nabla_x\varphi = 0\}} \mathrm{sign}(\det(D_x\nabla_x\varphi)) = \sum_{x \in C_\varphi} \mathrm{sign}\left(\det D_x^2\varphi\right) =$$

$$= \sum_{x \in C_\varphi} (-1)^{\mathrm{Ind}\, D_x^2\varphi}$$

□

Esempio 4.

1. Prendendo $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ e $\varphi : (x, y, z) \to z$, i punti critici sono $x_\pm = (0, 0, \pm 1)$, x_+ è un massimo per φ mentre x_- è un minimo, quindi $D_{x_+}\varphi$ è definita positiva e $D_{x_-}\varphi$ è definita negativa, dunque $\chi(M) = (-1)^2 + (-1)^0 = 2$; prendendo $M = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi(x, y) = y$, c'è sempre un massimo e un minimo e dunque $\chi(M) = (-1)^1 + (-1)^0 = 0$, analogamente $\chi(\mathbb{S}^n) = (-1)^n + 1$.

2. Considerando invece un toro con k buchi $M_k \subset \mathbb{R}^3$, la funzione $\varphi : (x, y, z) \to z$ ha un punto di massimo, uno di minimo e $2k$ punti di sella, due per ogni buco; dunque $\chi(M_k) = (-1)^2 + (-1)^0 + 2k(-1)^1 = 2 - 2k$.

Corollario 40.
Sia M una varietà di dimensione dispari.
Allora, $\chi(M) = 0$.

Dimostrazione.
Se $\dim(M) = 2k + 1$ è dispari e $V \in \mathrm{Vec}(M)$, allora $\det\left(-\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right) = (-1)^{2k+1} \det\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right)$, dunque

$$\chi(M) = V \cdot M = (-V) \cdot M = (-1)^{2k+1} V \cdot M = (-1)^{2k+1}\chi(M) = -\chi(M)$$

e cioè $\chi(M) = 0$. □

Lezione 10 – 18/11/2011

Teorema 41 (Hopf)**.**
Sia M una n-varietà compatta, connessa e orientabile e $f_0, f_1 \in C(M, \mathbb{S}^n)$.
Allora f_0 e f_1 sono omotope se e solo se $\deg f_0 = \deg f_1$.

Dimostrazione.
Se f_0 e f_1 sono omotope, allora $\deg f_0 = \deg f_1$ per il teorema 27.
Viceversa, fissato un valore regolare $y \in \mathbb{S}^n$ per f_0 e f_1, colleghiamo ogni coppia di punti di $f_0^{-1}(\{y\})$ dove $\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ha segno opposto con una curva in $M \times [0,1]$, e analogamente per $f_1^{-1}(\{y\})$; resteranno $|\deg f|$ punti su ogni $f_i^{-1}(\{y\})$ dove $\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ha lo stesso segno, colleghiamo ogni punto di $f_0^{-1}(\{y\})$ con un altro di $f_1^{-1}(\{y\})$ attraverso curve in $M \times [0,1]$, in modo tale che tutte queste curve γ_i non si intersechino, e poniamo $F\left(\bigcup_i \gamma_i\right) = y$; estendiamo F a un'intorno tubolare O_i delle γ_i: se γ_i connette due punti di $f_0^{-1}(\{y\})$, per ogni base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di $T_{\gamma_i(0)}M$, $\{e_1, \ldots, e_n, \dot{\gamma}(0)\}$ è una base di $T_{\gamma_i(0)}M \times [0,1]$ e può essere estesa lungo $\gamma_i(1)$ a $\{e_1(t), \ldots, e_{n+1}(t)\}$ mantenendo l'orientazione; inoltre, $\dot{\gamma}_i(0)$ e $\dot{\gamma}_i(1)$ sono orientati in maniera discorde, dunque le basi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{e_1(1), \ldots, e_n(1)\}$ hanno orientazione diversa, ma anche $\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ha segno diverso tra i due estremi della curva, quindi la matrice A_0 che rappresenta $D_{\gamma_i(0)}f_0$ rispetto a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ha determinante dello stesso segno della matrice A_1 che rappresenta $D_{\gamma_i(1)}f_0$ rispetto a $\{e_1(1), \ldots, e_n(1)\}$, pertanto esiste un cammino $A_s \in GL_n(\mathbb{R}^n)$ che le connette; dunque, F può essere estesa a O_i in modo tale che valga A_s su $\gamma(s)$, e analogamente si può estendere se γ_i connette due punti di $f_1^{-1}(\{y\})$ oppure un punto di $f_0^{-1}(\{y\})$ e uno di $f_1^{-1}(\{y\})$. $\square$

Lezione 11 – 24/11/2011

Lemma 42.
Sia M una varietà, $V \in \mathrm{Vec}(M)$, $\varphi_t : M \to M$ il flusso associato all'equazione $\dot{q} = V(q)$ e $q_0 \in M$ tale che $V(q_0) = 0$.
Allora il flusso associato all'equazione $\dot{\xi} = D_q V(q_0)\xi$ è $\varphi_{t*} : T_{q_0}M \to T_{q_0}M$.

Dimostrazione.

$$\dot{\xi}(t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_t}{\partial q}(q_0) = \frac{\partial}{\partial q}\frac{d}{dt}\varphi_t(q_0) = \frac{\partial}{\partial q}V(\varphi_t(q_0)) = \frac{\partial V}{\partial \xi}(\varphi_t(q_0))\frac{\partial \varphi_t}{\partial q}(q_0) = \frac{\partial V}{\partial \xi}(q_0)\frac{\partial \varphi_t}{\partial q}(q_0) = D_q V(q_0)\xi(t)$$

$\square$

Definizione 31.
Sia $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa lineare.
L'**esponenziale** di A è l'operatore $e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Osservazione 21.

1. Posta $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$, si ha $\left\|e^A\right\| \leq e^{\|A\|}$, dunque l'esponenziale è sempre ben definito.

2. La soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = Ax$ con dato iniziale assegnato è $x(t) = e^{tA}x(0)$.

3. Per ogni operatore invertibile S si ha $Se^{tA}S^{-1} = e^{tSAS^{-1}}$.

4. Scrivendo, con la notazione a blocchi, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, si ha $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{pmatrix}$.

Osservazione 22.
Se A e B commutano, allora $e^{AB} = e^A e^B$, ma ciò è falso se $AB \neq BA$: infatti, prendendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $A^2 = 0$, dunque $e^{tA} = \mathbb{I}_2 + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e analogamente $e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, dunque $e^{tA}e^{tB} = \begin{pmatrix} 1+t^2 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$, mentre $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e dunque essendo $(A+B)^2 = \mathbb{I}_2$ si ha

$$e^{t(A+B)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k (A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathbb{I}_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}A =$$

$$= \cosh t\mathbb{I}_2 + \sinh A = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Osservazione 23.
Considerando A come un'operatore su $\mathbb{C}^n$, è sempre possibile scriverlo in forma canonica, ovvero trovare un operatore invertibile S tale che $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A_m \end{pmatrix}$ dove $A_i = \lambda_i \mathbb{I}_{n_i} + B_i$ è un blocco di Jordan di dimensione n_i con $B_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dunque in virtù delle osservazioni precedenti si ha

$$e^{tA} = S^{-1}e^{tSAS^{-1}}S = S^{-1}e^{tSAS^{-1}}S = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tA_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{tA_k} \end{pmatrix}$$

e $e^{tA_i} = e^{\lambda_i t \mathbb{I}_{n_i} + tB_i} = e^{\lambda_i t \mathbb{I}_{n_i}} e^{tB_i} = e^{\lambda_i t} e^{tB_i}$; infine, per calcolare e^{tB_i}, noto che

$$B_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_i^{n_i-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ e $B_i^{n_i} = 0$, dunque $$e^{tB_i} = \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{(tA)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \frac{t^2}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} & \dots & \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$$; se $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$, con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, allora la soluzione sarà del tipo $\sum_{i=1}^{m} e^{\alpha_i t}(\cos(\beta_i t) + i \sin(\beta_i t)) p_i(t)$, con p_i polinomi reali.

Definizione 32.
Sia

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0 \tag{2}$$

un'equazione differenziale lineare scalare di ordine n e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

l'operatore associato all'equazione differenziale lineare $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x_n} = -a_0 x_1 - \dots - a_{n-1} x_n \end{cases}$

ottenuta dall'equazione (2) attraverso il cambio di variabile $x_k = x^{(k-1)}$.
A è l'**operatore corrispondente** all'equazione (2).

Lemma 43.
Nella matrice corrispondente a ogni equazione differenziale lineare scalare, scritta in forma canonica, ad ogni autovalore corrisponde un unico blocco di Jordan.

Dimostrazione.
Se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di A, allora l'equazione equivale a $(\partial - \lambda_1)_1^n \dots (\partial - \lambda_k)^{n_k}$, dunque poiché per ogni $j \in \{1, \dots, n_i\}$ e per ogni polinomio di grado j si ha $(\partial - \lambda_i)^j \left(e^{\lambda_i t} p(t)\right) = 0$, a ogni autovalore corrisponde un'unico blocco di Jordan. $\square$

Lezione 12 – 25/11/2011

Osservazione 24.
La soluzione $x(t)$ del sistema lineare $\dot{x} = Ax$ tenderà a 0 per $t \to +\infty$ per ogni dato iniziale se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, mentre se almeno un autovalore ha parte reale positiva allora $x(t) \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ per quasi ogni dato iniziale.

Definizione 33.
Sia M una varietà e $f \in \mathrm{Vec}(M)$ e $x_0 \in M$ un punto di equilibrio per l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$.
x_0 si dice **stabile** (secondo Ljapunov) se esiste per ogni suo intorno O ne esiste un altro U tale che $x(t) \in U$ se $x_0 \in O$.

Esempio 5.
In ogni equazione differenziale lineare 0 è un punto di equilibrio, ed è stabile se e solo se la parte regolare di ogni suo autovalore è non positiva e i blocchi di Jordan corrispondenti ad autovalori con parte reale nulla hanno dimensione 1.

Definizione 34.
Sia M una varietà e $f \in \mathrm{Vec}(M)$ e $x_0 \in M$ un punto di equilibrio per l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$.
x_0 si dice (localmente) **asintoticamente stabile** se esiste un suo intorno O tale che se $x(0) \in O$ allora $x(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

Teorema 44.
Sia M una varietà, $f \in \mathrm{Vec}(M)$ e $x_0 \in M$ un punto di equilibrio asintoticamente stabile per l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$.
Allora x_0 è stabile.

Dimostrazione.
Sia O un intorno di x_0 tale che $x(t) \underset{t\to+\infty}{\to} x_0$ se $x(0) \in O$; se $t_{x(0)}$ è tale che $x(t) \in O$ per ogni $t \geq t_x$ e $T = \sup\limits_{x(0)\in O} t_{x(0)}$, allora prendendo $U = \varphi_T(O)$ si ha che $x(t) \in O$ per ogni $x(0) \in U$. $\square$

Teorema 45.
Sia M una n-varietà e $f \in \mathrm{Vec}(M)$ e $x_0 \in M$ un punto di equilibrio asintoticamente stabile per l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$.
Allora $\mathrm{sign}(\det(D_{x_0} f))f = (-1)^n$.

Dimostrazione.
Essendo x_0 asintoticamente stabile, è uno zero isolato di f, dunque $\mathrm{sign}(\det(D_{x_0} f))f = \deg\left(\left.\frac{f}{\|f\|}\right|_{S_\varepsilon(x_0)}\right)$ e quindi è sufficiente trovare un'omotopia tra quest'ultima mappa e la mappa antipodale: posta $f_t(x) = \dfrac{\varphi_t(x) - x}{t}$, si ha $f_t \neq 0$ per ε sufficientemente piccolo, perché intorno a punti asintoticamente stabili non ci sono traiettorie periodiche,

dunque $F(s,x) = \begin{cases} f_{st}(x) & \text{se } s \in (0,1] \\ f(x) & \text{se } t = 0 \end{cases}$ è un'omotopia tra f_t e f, e dunque $\dfrac{F(s,x)}{\|F(s,x)\|}$ lo è tra $\left.\dfrac{f}{\|f\|}\right|_{S_\varepsilon(x_0)}$ e $\left.\dfrac{f_t}{\|f_t\|}\right|_{S_\varepsilon(x_0)}$; inoltre, prendendo t sufficientemente grande affinché $\dfrac{f_t(x)}{\|f_t(x)\|} \neq x$, $G(s,x) = \dfrac{s\frac{f_t(x)}{\|f_t(x)\|} - (1-s)x}{\left\|s\frac{f_t(x)}{\|f_t(x)\|} - (1-s)x\right\|}$ è un'omotopia tra $\left.\dfrac{f_t}{\|f_t\|}\right|_{S_\varepsilon(x_0)}$ e la mappa antipodale, dunque quest'ultima è omotopa a $\left.\dfrac{f}{\|f\|}\right|_{S_\varepsilon(x_0)}$. □

Definizione 35.
Sia M una varietà e $f \in \mathrm{Vec}(M)$ e $x_0 \in M$ un punto di equilibrio per l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$ e O un suo intorno.
Una **funzione di Ljapunov** per x_0 è una mappa $\phi \in C(O,\mathbb{R}) \cap C^1(O\backslash\{x_0\},\mathbb{R})$ tale che $\phi(x_0) = 0$ e, per ogni $x \in O\backslash\{x_0\}$ si abbia $\phi(x) > 0$ e $\langle D_x\phi(x), f(x)\rangle < 0$.

Osservazione 25.
L'ultima proprietà che caratterizza le funzioni di Ljapunov equivale a dire che ϕ decresce lungo le traiettorie: infatti, per t sufficientemente piccolo affinché $\varphi_t(x) \in O$ si ha

$$\frac{d}{dt}\phi(\varphi_t(x)) = \left\langle D_x\phi(\varphi_t(x)), \dot{\varphi_t}(x)\right\rangle = \langle D_x\phi(\varphi_t(x)), f(\varphi_t(x))\rangle < 0$$

Teorema 46.
Sia M una varietà e $f \in \mathrm{Vec}(M)$ e $x_0 \in M$ un punto di equilibrio per l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$.
Allora x_0 è asintoticamente stabile se e solo se esiste una funzione di Ljapunov per x_0.

Dimostrazione.
Innanti tutto, se esiste una funzione di Ljapunov in x_0 allora il punto è stabile, perché prendendo un intorno $O \Subset M$ di x_0 come nella definizione di funzione di Ljapunov e $U = O \cap \left\{x \in M : \phi(x) < \dfrac{\min_{\partial O}\phi}{2}\right\}$, allora le traiettorie che partono da U non possono mai lasciare O; inoltre, essendo $t \to \phi(\varphi_t(x))$ strettamente decrescente, allora $\dfrac{d}{dt}\phi(\varphi_t(x)) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, dunque per ogni successione $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$, per compattezza si ha $x_k \underset{k\to+\infty}{\to} \widetilde{x}$ a meno di estratte, quindi poiché

$$0 = \lim_{k\to+\infty}\frac{d}{dt}\phi(\varphi_{t_k}(x)) = \lim_{k\to+\infty}\langle D_x\phi(\varphi_{t_k}(x)), f(\varphi_{t_k}(x))\rangle = \langle D_x\phi(\widetilde{x}), f(\widetilde{x})\rangle$$

dev'essere $\widetilde{x} = x_0$ e quindi $x_k \underset{k\to+\infty}{\to} x_0$.
Viceversa, se x_0 è asintoticamente stabile, allora prendendo $a \in C(M,[0,+\infty))$

tale che $a(x_0) = 0$, $a(x) > 0$ per ogni $x \neq x_0$ e $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} a\left(\varphi_s(x)\right) ds < +\infty$, ϕ è una funzione di Ljapunov: infatti, $\phi(x) \geq 0$ e

$$\phi(x) = 0 \iff a\left(\varphi_t(x)\right) = 0 \iff \varphi_t(x) = 0 \iff x = x_0$$

Dunque per ogni $x \neq x_0$

$$\langle D_x\phi(x), f(x)\rangle = \left\langle D_x\phi(\varphi_t(x)), \dot{\varphi_t(x)}\right\rangle\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi(\varphi_t(x))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_0^{+\infty} a\left(\varphi_{s+t}(x)\right) ds\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_t^{+\infty} a\left(\varphi_s(x)\right) ds\right)\Big|_{t=0} = -a\left(\varphi_t(x)\right)|_{t=0} = -a(x) < 0$$

$\square$

Lezione 13 – 1/12/2011

Teorema 47.
Sia $f \in \mathrm{Vec}(\mathbb{R}^n)$ tale che 0 è un punto d'equilibrio asintoticamente instabile per l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$ e tutti gli autovalori dell'operatore $D_x f(0)$ hanno parte reale negativa.
Allora 0 è asintoticamente stabile.

Dimostrazione.
Per il teorema 46, è sufficiente mostrare l'esistenza di una funzione di Ljapunov: $\phi(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\|e^{sD_x f(0)}x\right\|^2 ds$ è una funzione strettamente positiva che si annulla nell'origine; inoltre, essendo $f(x) = D_x f(0)x + O\left(\|x\|^2\right)$,

$$\|\phi(x)\| \leq \int_0^{+\infty} e^{\min_{i\in\{1,\ldots,n\}}\lambda_i s}\|x\|^2 ds = e^{-\min_{i\in\{1,\ldots,n\}}\lambda_i}\|x\|^2$$

è ben definita e

$$\langle D_x\phi(x), D_x f(0)x\rangle = \left\langle D_x\phi\left(e^{tD_x f(0)}x\right), D_x f(0)e^{tD_x f(0)}x\right\rangle\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\phi\left(e^{tD_x f(0)}x\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_t^{+\infty}\left\|e^{sD_x f(0)}x\right\|^2 ds\Big|_{t=0} =$$

$$= -\left\|e^{tD_x f(0)}x\right\|^2\Big|_{t=0} = -\|x\|^2$$

allora

$$\langle D_x\phi(x), f(x)\rangle = \langle D_x\phi(x), D_x f(0)x\rangle + \left\langle D_x\phi(x), O\left(\|x\|^2\right)\right\rangle \leq -\|x\|^2 + O\left(\|x\|^4\right)$$

che è negativo se $\|x\|$ è sufficientemente piccolo, e dunque φ è una funzione di Ljapunov. $\square$

Osservazione 26.
In realtà si ha $\dfrac{d}{dt}\phi(x(t)) = -\varepsilon\phi(x(t))$ e dunque $x(t) \leq Ce^{-\varepsilon t}\|x(0)\|$.

Definizione 36.
Sia A un'operatore lineare su $\mathbb{R}^n$ tale che $\operatorname{spec} A \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.
Allora 0 è detto **punto di equilibrio iperbolico** e A è detto **operatore iperbolico**.

Osservazione 27.
Un operatore lineare A su $\mathbb{R}^n$ è iperbolico se e solo se esistono due sottospazi $E_\pm \subset \mathbb{R}^n$ tali che $\mathbb{R}^n = E_+ \oplus E_-$, $AE_\pm = E_\pm$ ed esistono $\lambda, c > 0$ tali che $\left\|e^{tA}x\right\| \leq ce^{-\lambda t}\|x(0)\|$ per ogni $x \in E_-, t > 0$ e $\left\|e^{tA}x\right\| \geq \dfrac{e^{\lambda t}x(0)}{c}$ per ogni $x \in E_+, t > 0$.

Definizione 37.
Siano $f, g \in \operatorname{Vec}(M)$ tali che $f(0) = 0 = g(0)$ e φ_t, ψ_t i flussi associati rispettivamente alle equazioni $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = f(y)$.
f e g si dicono **localmente topologicamente equivalenti** se esiste un intorno O di 0 e un omeomorfismo $\phi : O \to O$ tale che $\phi \circ \varphi_t = \psi_t \circ \phi$.

Proposizione 48.
*Siano $\dot{x} = Ax$ e $\dot{y} = By$ due sistemi lineari iperbolici e $E_\pm^A, E_\pm^B$ tali che $AE_\pm^A = E_\pm^A$, $BE_\pm^B = E_\pm^B$ e, per opportuni $\lambda, c > 0$, $\left\|e^{tA}x\right\| \leq ce^{-\lambda t}\|x(0)\|$ per ogni $x \in E_-^A, t > 0$, $\left\|e^{tB}x\right\| \leq ce^{-\lambda t}\|x(0)\|$ per ogni $x \in E_-^B, t > 0$, $\left\|e^{tA}x\right\| \geq \dfrac{e^{\lambda t}x(0)}{c}$ per ogni $x \in E_+^A, t > 0$, $\left\|e^{tB}x\right\| \geq \dfrac{e^{\lambda t}x(0)}{c}$ per ogni $x \in E_+^B, t > 0$.
Allora i due sistemi sono localmente topologicamente equivalenti se e solo se $\dim\left(E_\pm^A\right) = \dim\left(E_\pm^A\right)$.*

Dimostrazione.
Supponiamo che i due sistemi siano localmente topologicamente equivalenti: poiché $e^{tA} \circ \phi = \phi \circ e^{tB}$, ϕ mappa traiettorie che tendono a 0 in traiettorie che tendono a 0, dunque $\phi\left(E_-^A\right) \subset E_-^B$; ragionando allo stesso modo con ϕ^{-1} e scambiando si due sottospazi si deduce che $\phi\left(E_-^A\right) = E_B^-$, e dunque essendo ϕ un omeomorfismo i due sottospazi devono avere la stessa dimensione.
Supponiamo ora $\dim\left(E_+^A\right) = \dim\left(E_+^B\right)$: se questo numero è 0, l'omeomorfismo ϕ si può costruire in questo modo: indicando con φ e ψ i campi vettoriali associati ai sistemi $\dot{x} = Ax$ e $\dot{x} = -x$, per ogni $x \in B_1(0)$ esiste $y(x) \in S_1(0)$ tale che $\varphi_{\tau(x)}(y(x)) = x$ per qualche $\tau(x)$, dunque la mappa $\phi(x) = \psi_{\tau(x)}(y(x))$ è un'equivalenza topologica locale tra $\dot{x} = Ax$ e $\dot{x} = -x$; ripetendo il procedimento con B al posto di A si ottiene che i due sistemi sono localmente topologicamente equivalenti, e analogamente si può procedere quando $\dim\left(E_-^A\right) = \dim\left(E_-^B\right) = 0$; nel caso generale, scrivendo $x = x_+ + x_-$ con $x_\pm \in E_\pm^A$ è sufficiente porre $\phi(x) = \phi_+(x_+) + \phi(x_-)$, dove $\phi_\pm : E_\pm^A \to E_\pm^B$ sono mappe costruite come in precedenza. $\square$

Lemma 49.
Sia $f \in \mathrm{Vec}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *tale che* $f(0) = 0$.
Allora, esiste una famiglia $f_\varepsilon \in \mathrm{Vec}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *tale che* $f_\varepsilon \equiv f$ *su* $B_\varepsilon(0)$ *e* $f_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} D_x f(0)$.

Dimostrazione.
Presa $\varphi \in C_0^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ tale che $\varphi(x) \equiv 1$ se $\|x\| \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi(x) \equiv 0$ se $\|x\| \geq 2$, è sufficiente porre $f_\varepsilon(x) = D_x f(0)x + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(f(x) - D_x f(0)x)$; infatti, $f_\varepsilon(x) = f(x)$ se $\|x\| \leq \varepsilon$ e inoltre essendo $\|f(x) - D_x f(0)x\| = O\left(\|x\|^2\right)$ si ha

$$\|f_\varepsilon(x) - D_x f(0)x\| = \left\|\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(f(x) - D_x f(0)x)\right\| \leq$$

$$\leq \|f(x) - D_x f(0)x\| \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)} = O\left(\varepsilon^2\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

e inoltre

$$\|D_x f_\varepsilon(x) - D_x f(0)\| \leq$$

$$\leq \left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\| \|f(x) - D_x f(0)x\| + \left\|\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\| \|D_x f(x) - D_x f(0)\|\right) \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)} \leq$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon} O\left(\varepsilon^2\right) + O(\varepsilon) = O(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

□

Lemma 50.
Siano $f \in \mathrm{Vec}(M)$ *tale che* $f(0) = 0$ *e* $D_x f(0)$ *è iperbolico,* φ_t *e* ψ_t *i flussi associato rispettivamente ai sistemi* $\dot{x} = f(x)$ *e* $\dot{x} = D_x f(0)x$ *e* ϕ_1, ϕ_2 *due omeomorfismi tali che* $\phi_i \circ \varphi_t = \psi_t \circ \phi_i$ *per qualche* $t \neq 0$ *e* $\phi_i - \mathrm{Id}$ *è limitata per* $i = 1, 2$.
Allora, $\phi_1 = \phi_2$.

Dimostrazione.
Essendo $\phi_1^{-1} \circ \psi_t \circ \phi_1 = \varphi_t = \phi_2^{-1} \circ \varphi_t \circ \phi_2$, allora $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} \circ \psi_t \circ \left(\phi_1 \circ \phi_2^{-1}\right)^{-1} = \psi_t$ e quindi $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ con $\phi_1\left(\phi_2^{-1}(x)\right) - x$ limitata, e per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} \circ \psi_{kt} = \phi_1 \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_t \circ \psi_{(k-1)t} = \varphi_t \circ \phi_1 \circ \phi_2^{-1} \circ \psi_{(k-1)t} =$$

$$= \psi_{2t} \circ \phi_1 \circ \phi_2^{-1} \circ \psi_{(k-2)t} = \cdots = \psi_{kt} \circ \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$$

dunque $\varphi_{kt} \circ \left(\phi_1 \circ \phi_2^{-1} - \mathrm{Id}\right) = \left(\phi_1 \circ \phi_2^{-1} - \mathrm{Id}\right) \circ \varphi_{kt}$; se per assurdo fosse $\phi_1\left(\phi_2^{-1}(x)\right) \neq x$ per qualche x, allora scrivendo $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} - \mathrm{Id} = \phi_+ + \phi_-$ con $\mathrm{Im}(\phi_\pm) \subset E_\pm^{D_x f(0)}$, allora $\phi_\pm(x) \neq 0$ implicherebbe $\left\|\psi_{kt} \circ \left(\phi_1\left(\phi_2^{-1}(x)\right) - x\right)\right\| \underset{k \to \pm\infty}{\to} +\infty$ mentre $\left(\phi_1 \circ \phi_2^{-1} - \mathrm{Id}\right)\left(\psi_{kt}(x)\right)$ è limitato; dunque, dev'essere $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(x) = x$ per ogni x, cioè $\phi_1 = \phi_2$. □

Lemma 51.
Siano $f \in \mathrm{Vec}(M)$ tale che $f(0) = 0$ e $D_x f(0)$ è iperbolico, φ_t e ψ_t i flussi associato rispettivamente ai sistemi $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{x} = D_x f(0)x$ e $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una famiglia continua di diffeomorfismi tali che $\phi_t \circ \varphi_t = \psi_t \circ \phi_t$ e $\phi_t - \mathrm{Id}$ è limitato per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Allora, $\phi_t = \phi_s$ per ogni $t, s \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.
Fissato $t \neq 0$ e $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\phi_t \circ \varphi_{kt} = \phi_t \circ \varphi_t \circ \varphi_{(k-1)t} = \psi_t \circ \phi_t \circ \varphi_{(k-1)t} = \psi_{2t} \circ \phi_t \circ \varphi_{(k-2)t} = \cdots = \psi_{kt} \circ \phi_t$$

e inoltre $\phi_{kt} \circ \varphi_{kt} = \psi_{kt} \circ \phi_{kt}$, dunque per il lemma 50 dev'essere $\phi_{kt} = \phi_t$; analogamente, per ogni $s, t \in \mathbb{Q}$ si ha $\phi_s = \phi_t$, e dunque per continuità lo stesso vale per ogni $s, t \in \mathbb{R}$. □

Lezione 14 – 2/12/2011

Teorema 52 (Grobman-Hartman)**.**
Siano $f \in \mathrm{Vec}(M)$ tale che $f(0) = 0$ e $D_x f(0)$ è iperbolico.
Allora, il sistema $\dot{x} = f(x)$ è localmente topologicamente equivalente al sistema $\dot{x} = D_x f(0)x$.

Dimostrazione.
Grazie all'ultima osservazione e ai lemmi 49 e 51, è sufficiente dimostrare che se $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare ed esistono due sottospazi $E_\pm \subset \mathbb{R}^n$ tali che $PE_\pm = E_\pm$ e $\|Px_-\| \leq \alpha \|x_-\|$ e $\|Px_+\| \geq \dfrac{\|x_+\|}{\alpha}$ per ogni $x_\pm \in E_\pm$ qualche $\alpha \in (0, 1)$, allora esiste g a supporto compatto e piccola nella topologia C^1 e un'omeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\phi - \mathrm{Id}$ è limitata e $\phi \circ P = (P + g) \circ \phi$.
È sufficiente trovare $\widetilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nello spazio $C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue e limitate che verifichi $\widetilde{\phi} \circ P - P \circ \widetilde{\phi} = g \circ \left(\mathrm{Id} + \widetilde{\phi}\right)$, perché ciò implica che $\phi = \mathrm{Id} + \widetilde{\phi}$ verifica

$$\phi \circ P = P + \widetilde{\phi} \circ P = P + P \circ \widetilde{\phi} + g \circ \left(\mathrm{Id} + \widetilde{\phi}\right) =$$

$$= P \circ \left(\mathrm{Id} + \widetilde{\phi}\right) + g \circ \left(\mathrm{Id} + \widetilde{\phi}\right) = P \circ \phi + g \circ \phi$$

Inoltre, se $\widetilde{\phi}$ verifica queste proprietà, ϕ è automaticamente iniettiva e suriettiva: è iniettiva perché se $\phi(x) = \phi(y)$, allora

$$\phi(P(x)) = P(\phi(x)) + g(\phi(x)) = P(\phi(y)) + g(\phi(y)) = \phi(P(y))$$

dunque iterando per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ottiene

$$P^k x + \widetilde{\phi}\left(P^k x\right) = \phi\left(P^k x\right) = \phi\left(P^k y\right) = P^k y + \widetilde{\phi}\left(P^k y\right)$$

e quindi $P^k(x-y)=\widetilde{\phi}\left(P^k y\right)-\widetilde{\phi}\left(P^k y\right)$, pertanto dev'essere $x=y$, perché altrimenti il termine di sinistra tenderebbe a $+\infty$ per $|k|\to+\infty$ mentre quello a destra è limitato; per mostrare la suriettività, fissato $y\in\mathbb{R}^n$ è sufficiente prendere R_y abbastanza grande affinché $x+t\widetilde{\phi}(x)\neq y$ per ogni $x\in S_{R_y}(0), t\in[0,1]$ e considerare $F(x,t)=x+t\widetilde{\phi}(x)$: è un'omotopia tra e $\phi|_{B_{R_y}(0)}$ e $\mathrm{Id}_{B_{R_y}(0)}$, dunque $\deg\phi|_{B_{R_y}(0)}=\deg\mathrm{Id}\,|_{B_{R_y}(0)}=1$ e pertanto esiste $x\in B_{R_y}(0)$ tale che $\phi(x)=y$.

Mostriamo che l'operatore $L:\widetilde{\phi}\to\widetilde{\phi}\circ P-P\circ\widetilde{\phi}$ è invertibile: scrivendo $C_b\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)=\mathcal{E}_+\oplus\mathcal{E}_+$ con $\mathcal{E}_\pm=C_b(\mathbb{R}^n,E_\pm)$ e $\widetilde{P}:\phi\to P\circ\phi$, $P_\pm=\widetilde{P}|_{\mathcal{E}_\pm}:\mathcal{E}_\pm\to\mathcal{E}_\pm$ e $P^*:\phi\to\phi\circ P$, si ha $L|_{\mathcal{E}_\pm}=P^*-P_\pm$, dunque essendo $P_\pm$ invertibile basterà far vedere che lo è $P^*\circ P_\pm^{-1}-\mathrm{Id}$; per quanto riguarda $P^*\circ P_+^{-1}$, ciò discende dal fatto che $\left\|P^*\circ P_+^{-1}\right\|\leq\|P^*\|\left\|P_+^{-1}\right\|\leq\left\|P_+^{-1}\right\|\leq\alpha<1$, perché questo implica $\left(P^*\circ P_+^{-1}-\mathrm{Id}\right)^{-1}=-\sum_{k=0}^{+\infty}\left(P^*\circ P_+^{-1}\right)^k$;

nell'altro caso invece la stessa relazione è verificata da $\left(P^*\circ P_-^{-1}\right)^{-1}=P_-\circ(P^*)^{-1}$, in quanto $\left\|P_-\circ(P^*)^{-1}\right\|\leq\|P_-\|\left\|(P^*)^{-1}\right\|\leq\|P_-\|\leq\alpha<1$.

Essendo dunque L invertibile, per trovare una $\widetilde{\phi}$ con le proprietà richieste basterà far vedere che l'operatore $T:\widetilde{\phi}(x)\to L^{-1}\left(g\left(x+\widetilde{\phi}(x)\right)\right)$ ha un punto fisso, ma questo è vero perché T è una contrazione in quanto

$$\left\|T\widetilde{\phi}_1-T\widetilde{\phi}_2\right\|=\sup_{\|x\|=1}\left\|L^{-1}\left(g\left(x+\widetilde{\phi}_1(x)\right)-g\left(x+\widetilde{\phi}_1(x)\right)\right)\right\|\leq$$

$$\leq\left\|L^{-1}\right\|\sup_{\|x\|=1}\left\|g\left(x+\widetilde{\phi}_1(x)\right)-g\left(x+\widetilde{\phi}_2(x)\right)\right\|\leq$$

$$\leq\frac{1}{1-\alpha}\|\nabla g\|\|\phi_1-\phi_2\|\leq\theta\|\phi_1-\phi_2\|$$

con $\theta<1$ se g è tale che $\|\nabla g\|<1-\alpha$.

Lezione 19 – 12/1/2012

Definizione 38.
Sia M una varietà, $x_0\in M$ e $f\in\mathrm{Vec}(M)$.
L'insieme ω**-limite** di x_0 associato al sistema dinamico $\dot{x}=f(x)$ è

$$\omega(x_0):=\left\{y\in M:\exists t_k\underset{k\to+\infty}{\to}+\infty\ \textbf{tale che}\ \varphi_{t_k}(x_0)\underset{k\to+\infty}{\to}y\right\}$$

L'insieme α**-limite** è

$$\alpha(x_0):=\left\{y\in M:\exists t_k\underset{k\to-\infty}{\to}+\infty\ \textbf{tale che}\ \varphi_{t_k}(x_0)\underset{k\to+\infty}{\to}y\right\}$$

Osservazione 28.
$\omega(x_0)=\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\overline{\{\varphi_t(x):t\geq j\}}$; infatti, se $y\in\omega(x_0)$ allora $\varphi_{t_k}(x)\underset{k\to+\infty}{\to}y$ per una

successione $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$, allora per ogni $j \in \mathbb{N}$ si può supporre, a meno di estratte, $t_k \geq j$, e dunque $y \in \overline{\{\varphi_t(x_0) : t \geq j\}}$, quindi per l'arbitrarietà di j $y \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{\{\varphi_t(x_0) : t \geq j\}}$; viceversa, se $y \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{\{\varphi_t(x_0) : t \geq j\}}$ allora per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste $t_{k,j} \geq j$ tale che $\varphi_{t_{k,j}}(x_0) \underset{k\to+\infty}{\to} y$ e dunque, passando ad un estratta tale che $d(\varphi_{t_{k,j}}(x_0), y) \leq \dfrac{1}{j}$, si ottiene $d(\varphi_{t_{k,k}}(x_0), y) \leq \dfrac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ e $t_{k,k} \geq k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$, quindi $y \in \omega(x_0)$.

Proposizione 53.
Sia M una varietà compatta, $x_0 \in M$ e $f \in \mathrm{Vec}(M)$ e $\omega(x_0)$ il suo ω-limite. Allora:

1. $\omega(x_0) \neq \emptyset$
2. $\omega(x_0) = \overline{\omega(x_0)}$
3. $\omega(x_0)$ *è connesso.*
4. $\omega(x_0)$ *è unione di traiettorie.*

Dimostrazione.

1. Segue dall'osservazione precedente, in quanto ogni chiuso contenuto in un compatto è compatto e l'intersezione decrescente di compatti è non vuota.
2. Segue dell'osservazione precedente, in quanto l'intersezione di chiusi è chiusa.
3. Se per assurdo $\omega(x_0)$ fosse sconnesso, esistessero due aperti disgiunti U_1, U_2 tali che $U_1 \cap \omega(x_0) \neq \emptyset \neq U_2 \cap \omega(x_0)$, prendendo $y_i \in \omega(x_0) \cap U_i$ e $t_{k,i} \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ per $i = 1, 2$, con $t_{k,1} < t_{k,2} < t_{k+1,1}$, allora per connessione $\{\varphi_t(x_0); t \in [t_{k,1}, t_{k,2}]\} \not\subset U_1 \cup U_2$, dunque prendendo $\varphi_{t_k}(x_0) \notin U_1 \cup U_2$ con $t_k \in [t_{k,1}, t_{k,2}]$, per la compattezza di $M \backslash (U_1 \cup U_2)$ si avrà $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ e, a meno di estratte, $\varphi_{t_k} \underset{k\to+\infty}{\to} y \notin U_1 \cup U_2$, e quindi $y \in \omega(x_0) \backslash (U_1 \cup U_2)$, che è assurdo.
4. Se $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ e $\varphi_{t_k}(x_0) \underset{k\to+\infty}{\to} y$, allora $\varphi_{t_k - t}(\varphi_t(x_0)) = \varphi_{t_k}(x_0) \underset{k\to+\infty}{\to} y$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi $\varphi_t(x_0) \in \omega(x_0)$ e perciò, per l'arbitrarietà di t, $\omega(x_0)$ è unione di orbite.

□

Esempio 6.

1. Per il sistema $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = by \end{cases}$ su $\mathbb{R}^2$ con $b < 0 < a$, $\omega(x_0) = \{0\}$ se $x_0 \in \{x = 0\}$, altrimenti $\omega(x_0) = \emptyset$.

2. Se la traiettoria con dato iniziale x_0 è periodica, $\omega(x_0)$ coincide con la traiettoria.
3. Per il sistema $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = by \end{cases}$ sul toro $\mathbb{T} := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, la traiettoria è quasi-periodica e $\omega(x_0) = \mathbb{T}$ per qualsiasi dato iniziale.

Lemma 54.
Sia $M = \mathbb{S}^2$, $f \in \mathrm{Vec}(M)$, Σ un segmento trasversale al flusso $\varphi_t(x)$ e $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ l'intersezione tra Σ e la traiettoria γ.
Allora $x(t)$ è monotona su Σ.

Corollario 55.
L'intersezione tra Σ e $\omega(\gamma)$ contiene un solo punto se $\Sigma \cap \gamma$ è infinita, oppure è vuota se l'intersezione è finita.

Corollario 56.
Se f ha un numero finito di zeri e $\xi \subset \omega(\gamma)$ è una traiettoria non periodica, allora $\omega(\xi)$ e $\alpha(\xi)$ contengono esattamente un punto.

Teorema 57 (Poincaré-Bendixson)**.**
Sia $M = \mathbb{S}^2$, $f \in \mathrm{Vec}(M)$ con un numero finito di zeri e $x_0 \in M$.
Allora, $\omega(x_0)$ può essere un punto di equilibrio oppure un orbita chiusa oppure una traiettoria tendente asintoticamente a due punti di equilibrio.
Inoltre, $\omega(x)$ varia con continuità al variare di $x \in M$.

Osservazione 29.
Il teorema 57 non vale per tutte le varietà, ad esempio non vale per il toro $\mathbb{T} := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, come si deduce dall'ultimo esempio.

Lezione 20 – 13/1/2012

Definizione 39.
Sia M una varietà e $f, g \in \mathrm{Vec}(M)$.
f e g sono **topologicamente equivalenti** se esiste un omeomorfismo $F : M \to M$ tale che γ è una traiettoria per il sistema $\dot{x} = f(x)$ se e solo se $F(\gamma)$ lo è per $\dot{y} = g(y)$.

Osservazione 30.
Detti φ_t e ψ_t i flussi associati rispettivamente ai sistemi $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$, se $F \circ \varphi_t = \psi_t \circ F$ allora i due sistemi sono topologicamente equivalenti.

Definizione 40.
Sia M una varietà e $f \in \mathrm{Vec}(M)$.
f si dice **strutturalmente stabile** se per ogni $g \in \mathrm{Vec}(M)$ vicino a f (nella topologia C^1) il sistema $\dot{x} = f(x)$ è topologicamente equivalente a $\dot{y} = g(y)$.

Definizione 41.
Sia M una n-varietà, $x_0 \in M$, $f \in \mathrm{Vec}(M)$, γ una traiettoria periodica per $\dot{x} = f(x)$, Σ $n-1$-dimensionale trasversale a x_0 e $R : \Sigma \to \Sigma$ una mappa di ritorno tale che $R(x_0) = R(x_0)$ tale che x_0 è un punto di equilibrio iperbolico per R.
γ è detto **ciclo iperbolico**.

Teorema 58.
Sia M una varietà, $f \in \mathrm{Vec}(M)$ e $\gamma \subset M$ un ciclo iperbolico per il sistema $\dot{x} = f(x)$.
Allora, f è localmente strutturalmente stabile intorno a γ.

Teorema 59.
Sia $M = \mathbb{S}^2$ e $f \in \mathrm{Vec}(M)$.
f è strutturalmente stabile se e solo se:

1. *Tutti i punti di equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$ sono iperbolici.*
2. *Le uniche traiettorie periodiche sono iperboliche.*
3. *Non ci sono traiettorie non periodiche tendenti asintoticamente a due selle.*

Lezione 21 – 20/1/2012

Teorema 60.
Sia $M = \mathbb{S}^2$ e $S \subset \mathrm{Vec}(M)$ l'insieme dei sistemi strutturalmente stabili.
Allora S è denso in $\mathrm{Vec}(M)$.

□